Newtons metod-ekvationslösning

I denna aktivitet så visar vi hur man kan lösa ekvationer numeriskt med hjälp av derivata. Långt innan grafräknare och avancerade datorprogram i matematik fanns inom gymnasieskolan så var man tvungen att ta till numeriska metoder. En sådan är Newtons metod där man utnyttjar derivata. Först tar vi dock lite om metoder där man inte använder derivator. Det handlar om upprepade beräkningar och det finns en annan aktivitet *Arbeta med CAS-upprepade beräkningar* där vi tar upp hur man kan utnyttja denna teknik för att lösa problem av olika slag.

Man kan fråga sig varför vi tar upp detta. Jo, nu är det ju så att många av de beräkningar som vi till exempel kan göra med TI-Nspire är osynliga för oss. Vi ser ofta bara resultatet. Då kan det vara en god pedagogisk idé att visa hur det kan gå till internt i datorns eller räknarens program. Då kommer det viktiga begreppet *rekursion* in i bilden. Där tar man fram en serie av approximationer till en rot till en ekvation och varje nytt (och bättre) värde beräknas med hjälp av det föregående.

I kurs 5 tar man upp detta i samband med beräkningar på talföljder. I TI-Nspire´s app för grafer kan man arbeta med den beskrivna typen av beräkningar. På sid 4 och 5 visar vi det.

Sid 2-6

Här visar vi hur vi kan lösa ekvationen x-sin(2x)=0 utan hjälp av derivata.

Beräkningarna kan utföras direkt i Räknarappens fönster och man utnyttjar den s.k **ans**-funktionen. ans står för sista beräknade svar. Vi börjar med startvärdet 0,8 och trycker sedan på enter. Därefter skriver vi sin(2·ans) och trycker sedan på enter igen… och igen.

Det ***inbyggda*** verktyget hos TI-Nspire ger:

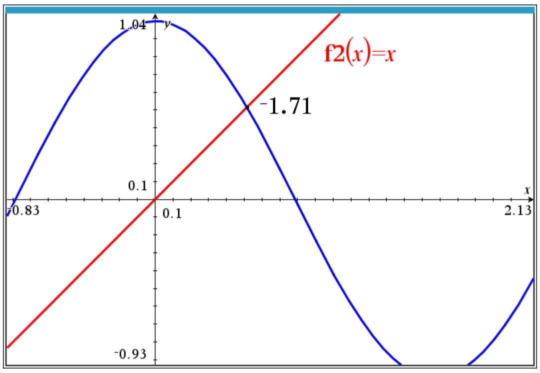
solve(x=sin(2·x),x)

▸ x=-0.947747 or x=0.000000 or x=0.947747

sin(2· 0.94774535942953)	0.947748
sin(2· 0.94774826545873)	0.947746
sin(2· 0.94774641128473)	0.947748
sin(2· 0.94774759433271)	0.947747
sin(2· 0.94774683949541)	0.947747
sin(2· 0.94774732111585)	0.947747

Värdet stabiliseras till 0.947747efter ett stort antal iterationer.

När man prövar med ekvationen x-cos(2x)=0 fungerar inte denna metod alls. Anledningen är att cosinusfunktionen har för stor lutning. I grafen visas lutningen i skärningspunkten.



Problem 2

Metod där man använder derivator

Vi antar att vi ska beräkna nollställen till en funktion f(x) med en annan metod, **Newton–Raphsons metod.** Det är en *iterativ* metod för att beräkna nollställen där man använder sig av *derivator*.

Man börjar med att gissa ett startvärde $x0$. Sedan konstruerar man en *tangent* vid denna punkt ($x0$, f($x0$)). Denna tangent träffar x–axeln vid $x1$. Denna punkt ger (oftast) ett bättre närmevärde på nollstället än $x0$. Vi kan nu konstruera en ny tangent och hamnar nu i punkten $x2$ på x–axeln, som är ett ännu bättre närmevärde. Så här kan man fortsätta tills man kommer tillräckligt nära nollstället.

Se grafen på nästa sida.

På sidorna 2-4 härleder vi det rekursiva uttrycket.

Vi börjar med en enkel ekvation och först definierar vi ekvationen och dess derivata. Sedan matar vi in 2 som startvärde och trycker på enter. 2 är då det sista beräknade värdet och det ligger lagrat i **ans**.

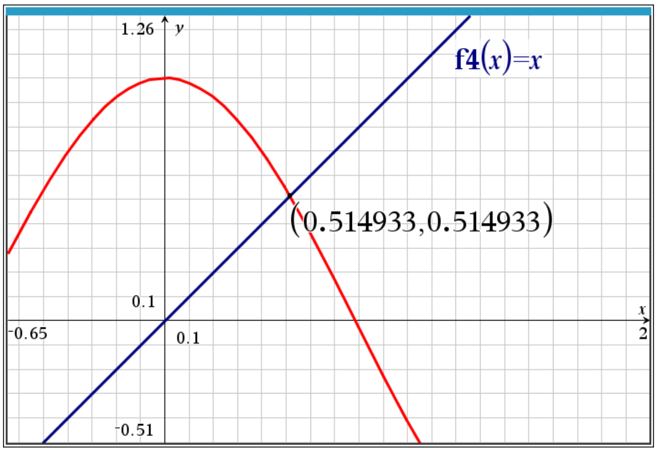
Define $f(x)=x^2-3$	*Klar*
Define $df(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Klar*
2	2
$2-\frac{f(2)}{df(2)}$	$\frac{7}{4}$
$\frac{7}{4}-\frac{f\left(\frac{7}{4}\right)}{df\left(\frac{7}{4}\right)}$	$\frac{97}{56}$
$\frac{97}{56}-\frac{f\left(\frac{97}{56}\right)}{df\left(\frac{97}{56}\right)}$	$\frac{18817}{10864}$

$\frac{97}{56}-\frac{f\left(\frac{97}{56}\right)}{df\left(\frac{97}{56}\right)}$	$\frac{18817}{10864}$
$\frac{18817}{10864}-\frac{f\left(\frac{18817}{10864}\right)}{df\left(\frac{18817}{10864}\right)}$	$\frac{708158977}{408855776}$
$\frac{708158977}{408855776}-\frac{f\left(\frac{708158977}{408855776}\right)}{df\left(\frac{708158977}{408855776}\right)}$	1.73205
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$	1.73205

Problem 3

Här löser vi nu ekvationen x-cos(2x) = 0. Redan efter ett par iterationer så har vi korrekt resultat med sex decimaler.

Define $f(x)=\cos(2\cdot x)-x$	*Klar*
Define $df(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Klar*
0.8	0.8
$0.8-\frac{f(0.8)}{df(0.8)}$	0.523522
$0.52352156619073-\frac{f(0.52352156619073)}{df(0.52352156619073)}$	0.514961
$0.51496053810456-\frac{f(0.51496053810456)}{df(0.51496053810456)}$	0.514933
$0.51493326494333-\frac{f(0.51493326494333)}{df(0.51493326494333)}$	0.514933



I problem 4 har vi en mer komplicerad ekvation. Ge gärna eleverna några andra ekvationer att träna på.