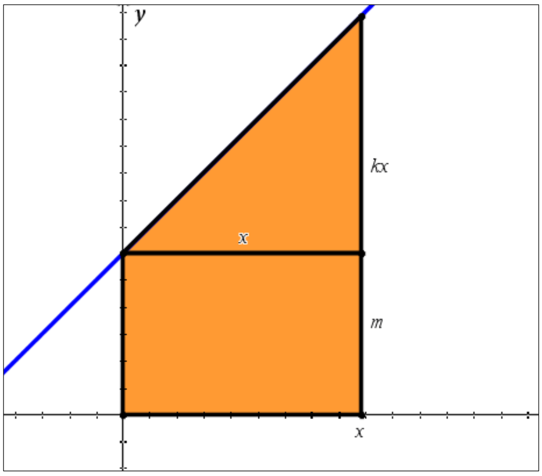
Primitiva funktioner och beräkning av areor

För att arbeta med denna aktivitet fordras att man känner till begreppet *primitiv funktion* och kan beräkna sådana för enkla funktioner.

Till att börja med ska vi utforska en algebraisk/geometrisk metod för att bestämma arean som finns mellan en kurva och *x*-axeln. Kan man använda den primitiva funktionen för att bestämma arean under en kurva?

Vi börjar med att titta på några exempel där vi bestämmer arean som finns mellan några linjära funktioner och *x*-axeln. Vi kallar de funktioner vi då får fram för *areafunktioner* och betecknar dem $A(x)$. Här betyder det då arean under linjen från *y*-axeln fram till ett värde *x*.



Vi har här en rät linje vars ekvation kan skrivas $y = kx + m$. Arean under linjen mellan 0 och *x* kan beräknas genom att lägga ihop arean av rektangeln och triangeln. Vi får:

$$A(x) = m \cdot x + \frac{x \cdot kx}{2} = \frac{kx^2}{2} + mx$$

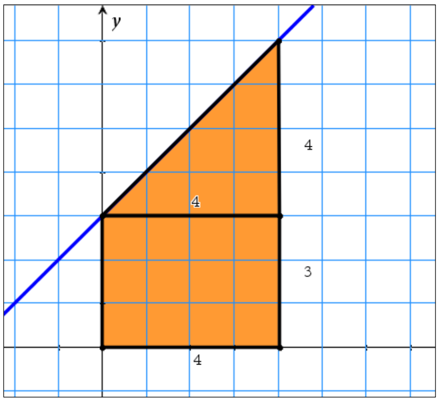
För linjen $y = x + 3$ får vi då

$$A(x) == \frac{x^2}{2} + 3x$$

Men det är ju en primitiv funktion till $y = x + 3$!

Vi beräknar nu arean under linjen mellan *x* = 0 och *x* = 4.

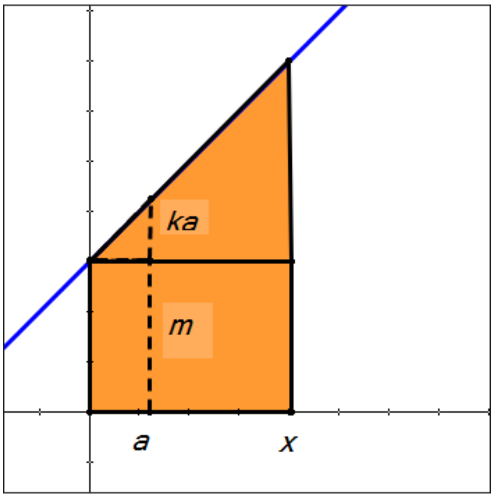
Vi får $A = \frac{kx^2}{2} + mx = \frac{1 \cdot 4^2}{2} + 3 \cdot 4 = 20$



Om vi ska beräkna arean från *a* i stället kan vi räkna hela arean av det färgade området och sedan dra bort arean från 0 till den streckade linjen vid *x* = *a*.

$$A = \frac{kx^2}{2} + mx - \left(\frac{a \cdot ka}{2} + m \cdot a\right) =$$

$$A = \frac{kx^2}{2} + mx - \left(\frac{ka^2}{2} + ma\right)$$

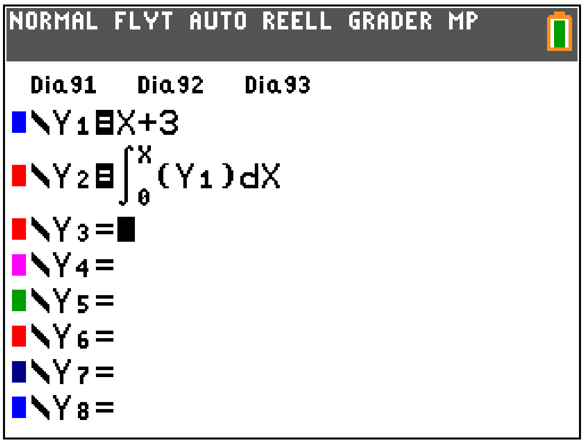


Om vi nu gör beräkningen med funktionen $y = x + 3$ och *a*-värdet 1 får vi

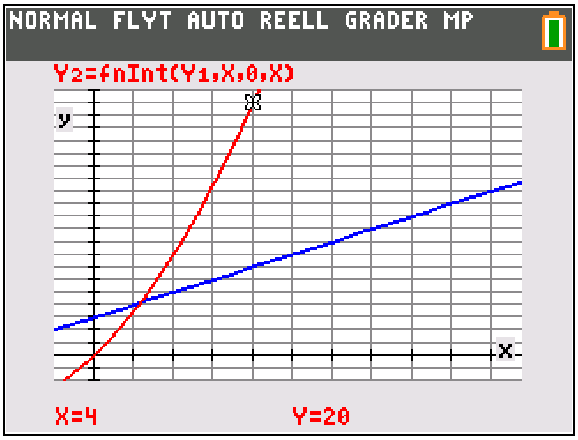
$$A = \frac{kx^2}{2} + mx - \left(\frac{ka^2}{2} + ma\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1 \cdot 4^2}{2} + 3 \cdot 4}_{20} - \underbrace{\left(\frac{1 \cdot 1^2}{2} + 3 \cdot 1\right)}_{3,5} = 16,5$$

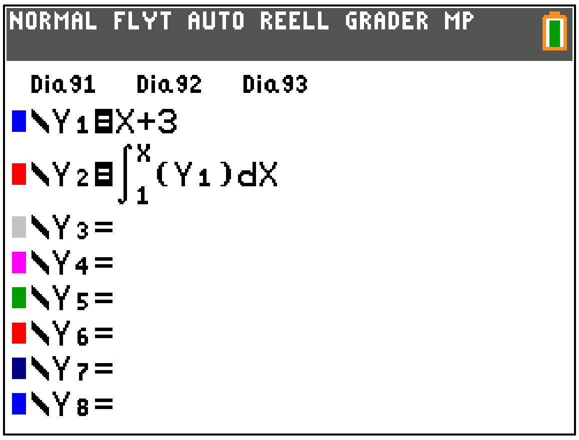
Nu ska vi göra dessa beräkningar numeriskt med räknaren och plotta Areafunktionen/Primitiva funktionen i Y2 enligt skärmbilden nedan. Tryck på **fnInt** i $\boxed{\text{enter}}$-menyn när du har markören på plats Y2 och fyll i mallen enligt nedan. Vi ska alltså plotta areafunktionen och sedan beräkna arean när *x*=4.



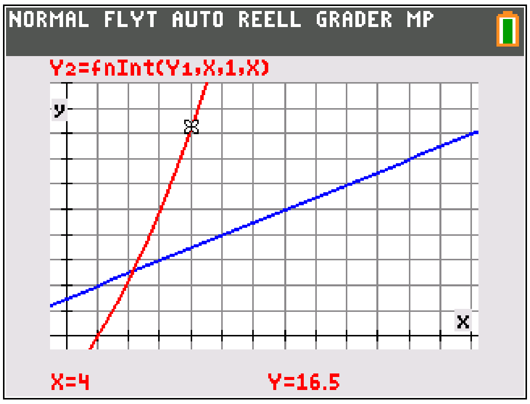
Här ser du resultatet. Arean mellan *x* = 0 och *x* =4 är 20. Det stämmer ju med tidigare beräkning.



Vill vi ha beräkningen av arean mellan x= 1 och *x* = 4 så skriver vi så här:

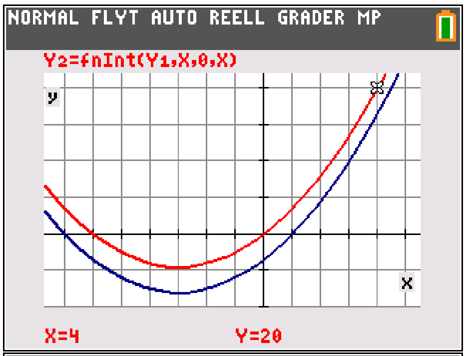


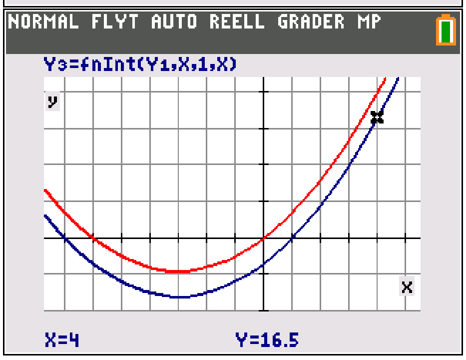
Nu plottar vi areafunktionen och spårar i grafen. *x* = 4 ger värdet 16,5.



Vi får resultatet 16,5, precis som beräkningarna i vänstra spalten.

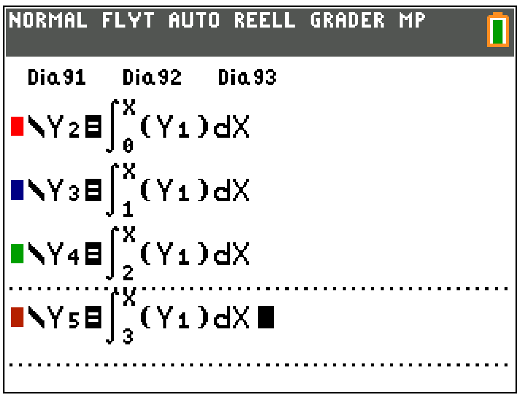
Nu förstorar vi fönstret så att vi tydligare se de båda areafunktionerna.



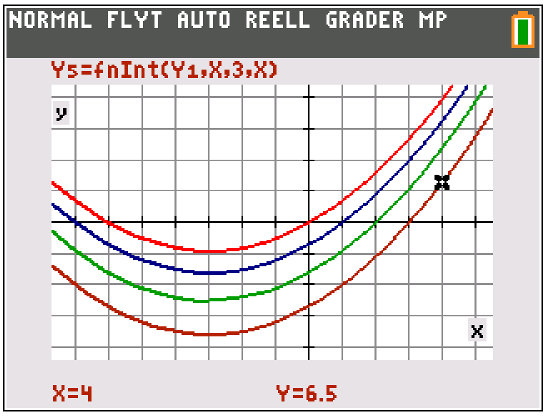


Vi kan skapa två areafunktioner genom att välja beräkning av arean från *x*-värdena 2 och 3.

Så här ser då inmatningsfönstret ut:



Och så här plottningen i ett bra fönster.



Titta på den sista delen inom parentes i uttrycket

$$A=\frac{kx^2}{2}+mx-\left(\frac{ka^2}{2}+ma\right)$$

För linjen $y=x+3$ är *k*-värdet 1 och *m*-värdet =3. *a*-värdet är 1, 2 och 3 för den blå, gröna och bruna kurvan och kurvorna har då förskjutits 3,5, 8 resp. 13,5 steg jämfört med den röda kurvan. Se uppställningen nedan.

$$a=1 \quad \left(\frac{ka^2}{2}+ma\right)=\left(\frac{1\cdot 1^2}{2}+3\cdot 1\right)=3{,}5$$

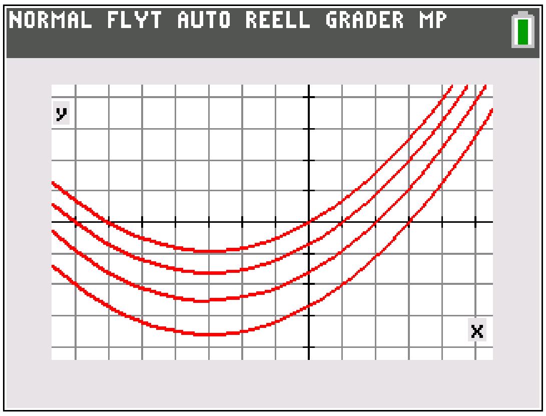
$$a=2 \quad \left(\frac{ka^2}{2}+ma\right)=\left(\frac{1\cdot 2^2}{2}+3\cdot 2\right)=8$$

$$a=3 \quad \left(\frac{ka^2}{2}+ma\right)=\left(\frac{1\cdot 3^2}{2}+3\cdot 3\right)=13{,}5$$

Alla fyra kurvorna är primitiva funktioner till $y=x+3$. Vi kan alltså skriva dem som

$F(x)=\frac{x^2}{2}+3x+C$ där C = 0, -3,5, -8, -13,5.

Om vi plottar dem blir det så här:



Vi får samma kurvskara som överst i denna spalt.

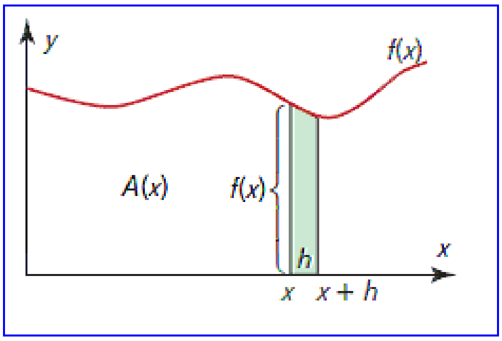
Tips:
Du kan plotta alla fyra funktionerna på en gång om du skriver

$$Y=\frac{x^2}{2}+3x+\{0,-3.5,-8,-13{,}5\}$$

Använd alltså klammerparenteser. Tryck på $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{(}$ resp. $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{)}$.

Är det alltid så att den primitiva funktionen kan användas för att bestämma arean under en kurva? För våra linjära funktioner verkar det vara så.

Vi genomför inte resonemanget i sin helhet



Arean av det färgade området är ungefär $f(x)\cdot h$. Det stämmer inte exakt eftersom det inte är en rektangel men om vi låter *h* vara väldigt litet så kommer det att stämma bättre. Om vi sedan låter *h* gå mot noll så stämmer det exakt.

Vi kan då ställa upp följande

$$A(x+h)-A(x)\approx f(x)\cdot h \quad \Rightarrow \quad \frac{A(x+h)-A(x)}{h}\approx f(x)$$

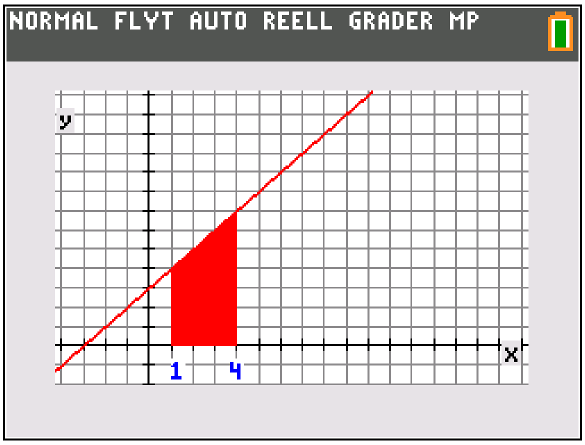
Nu låter vi h gå mot noll:

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$$

Detta är ju derivatans definition och vi kan då alltså slutföra vårt resonemang: derivatan av $A'(x)=f(x)$. $A(x)$ är alltså en primitiv funktion till $f(x)$.

Nu blir det betydligt enklare att beräkna areor under linjen $y=x+3$. En primitiv funktion är

$y=\frac{x^2}{2}+3x$ eftersom $y'=x+3$.



Hur ska vi nu beräkna arean av det röda området?

A(4) är ju arean till vänster om *x*=4 och *A*(1) är arean till vänster om *x*=1. Det betyder att den färgade arean kan skrivas

$A(4)-A(1)$

Och då vi nu har konstaterat att areafunktionen *A*(*x*)= den primitiva funktionen *F*(*x*) så kan den röda arean skrivas som

$F(4)-F(1)$

Med symboler skriver man det här som

$$\int_1^4 x+3\,dx$$

Man utläser detta som ”integralen av $f(x)=x+3$ från 1 till 4”.

Allmänt skriver man $\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(a)-F(b)$

Vi ska beräkna den rödfärgade arean. Den primitiva funktionen är $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x+C$ och då blir det så här

$$\int_1^4 x+3\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_1^4=F(4)-F(1)=$$

$$=\frac{4^2}{2}+3\cdot 4-\left(\frac{1^2}{2}+3\cdot 1\right)=8+12-\frac{1}{2}-3=16\tfrac{1}{2}$$

Jämför med den geometriska beräkningen på sid 2.

Om vi utgår från den primitiva funktionen

$F(x)=\frac{x^2}{2}+3x+C$

så blir det så här

$$\int_1^4 x+3\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+3x+C\right]_1^4=F(4)-F(1)=$$

$$=\frac{4^2}{2}+3\cdot 4+C-\left(\frac{1^2}{2}+3\cdot 1+C\right)=$$

$$=8+12+\cancel{C}-\frac{1}{2}-3-\cancel{C}=16\tfrac{1}{2}$$

Konstanten C ”försvinner”. I beräkningar med integraler så använder man alltid primitiva funktioner utan konstant.