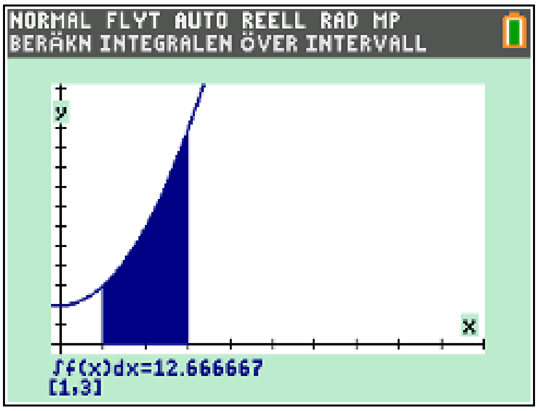
Stänga in en integral

För att göra denna aktivitet för du vara väl förtrogen med algebraiska/analytiska metoder för att bestämma integraler. Där handlar det om att finna en primitiv funktion till integranden. Många integraler, till exempel sådana som dyker upp i tillämpningar, är svåra eller omöjliga att hitta primitiva funktioner till. Det händer också att man inte har något färdigt funktionssamband utan kanske bara en värdetabell. Det är då man behöver effektiva numeriska metoder. Vi visar i några enkla fall hur det dessa fungerar.

En annat viktigt motiv att syssla med numeriska beräkningar av integraler är att du oftast, ibland på ren rutin, lära dig att ta fram exakta svar med hjälp av primitiva funktioner och då kan man lätt tappa bort *det väsentliga i begreppet integral, nämligen att integralen är ett gränsvärde av en summa.*

Du ska nu beräkna arean som avgränsas av kurvan med funktionen $y = x^2 + 2$, x-axeln och de vertikala linjerna x=1 och x=3.



Om vi använder räknarens inbyggda verktyg när grafen är plottad (tryck på y / och välj alternativ 7 får vi värdet 12,666667. Dessutom kan du ju utföra integreringen algebraiskt:

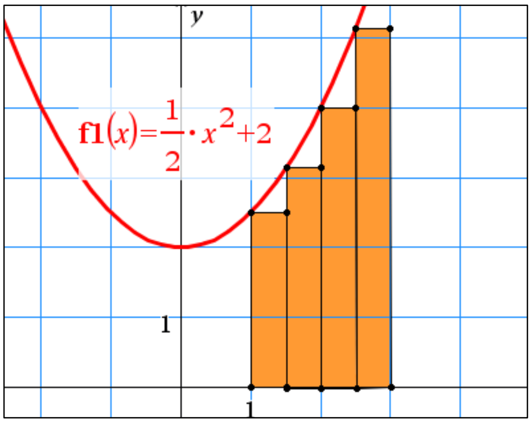
$$\int_1^3 (x^2+2)dx = \left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3}+2\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3}+2\cdot 1\right) =$$

$$= \frac{27}{3}+6-\frac{1}{3}-2 = 12\frac{2}{3}$$

Vi ska nu visa hur du på ett smart sätt kan jobba med din räknare för att beräkna areorna numeriskt. Vi börjar med en beräkning av den s.k. undersumman. Vi arbetar med fyra delintervall och höjden i varje rektangel räknar vi från vänster. Det betyder att vi ska beräkna funktionsvärden vid x-värdena 1, 1,5, 2 och 2,5. Skriv först in funktionen $y = x^2 + 2$ vid Y1 i funktionseditorn.

Undersumma



Gå nu över till statistikeditorn. i L1 skriver du in x-värdena 1, 1,5, 2 och 2,5. Gå sedan till listhuvudet i L2 och skriv där

"Y1(L1)"

Då beräknas funktionsvärdena för x-värdena. Det är ju samma sak som rektanglarnas höjder. Tänk på att skriva citattecken,", omkring formeln. Då uppdateras listan om du har andra värden i L1.

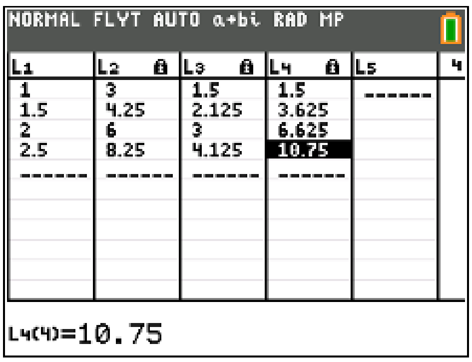
I L3 så skriver du

"L2*0.5"

Då beräknas arean av varje rektangel. I L4 slutligen skriver du

"kumSum(L3)"

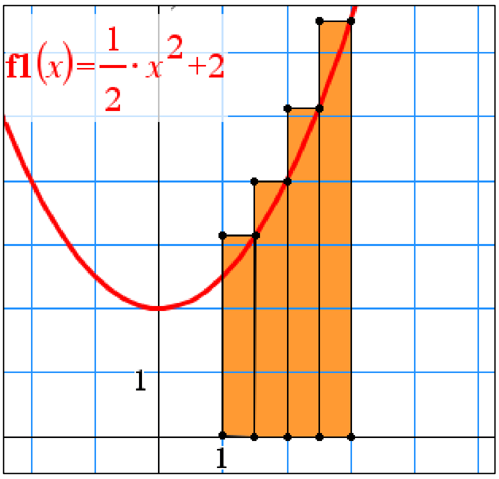
Då beräknas de kumulerade värdena på arean. Överst står arean av den första rektangeln och på fjärde raden står alltså den totala arean. Vi får värdet 10.75. Se skärmbilden nedan.


NORMAL FLYT AUTO a+bi RAD MP

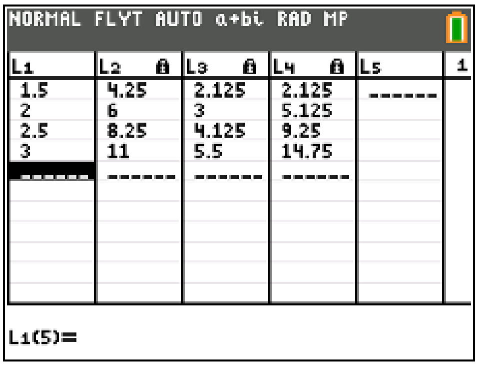
L1	L2	L3	L4	L5
1	3	1.5	1.5	------
1.5	4.25	2.125	3.625	
2	6	3	6.625	
2.5	8.25	4.125	10.75	
------	------	------	------	

L4(4)=10.75

Översumma



Gå nu över till statistikeditorn. i L1 skriver du in x-värdena 1,5, 2, 2,5 och 3. Se figuren ovan. Nu uppdateras listorna

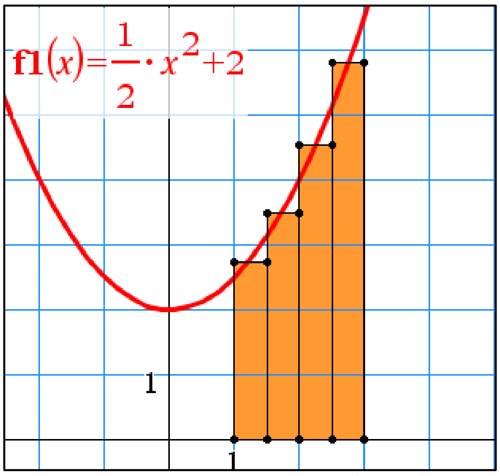


L1	L2	L3	L4	L5
1.5	4.25	2.125	2.125	------
2	6	3	5.125	
2.5	8.25	4.125	9.25	
3	11	5.5	14.75	
------	------	------	------	

L1(5)=

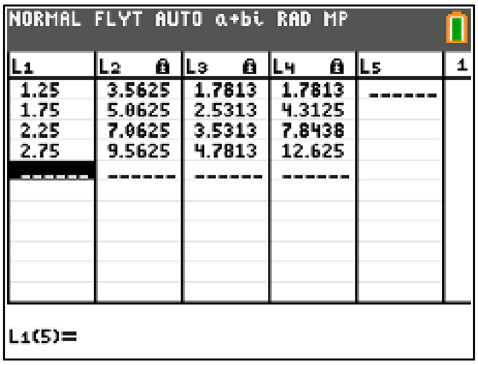
Vi får för beräkningarna av över- och under-summa värden som ligger klart under och över det riktiga värdet. Kanske kan vi hitta en bättre metod genom att ta något mitt emellan.

Mittpunktsmetoden



Vi beräknar vi funktionsvärdena i intervallens mittpunkter

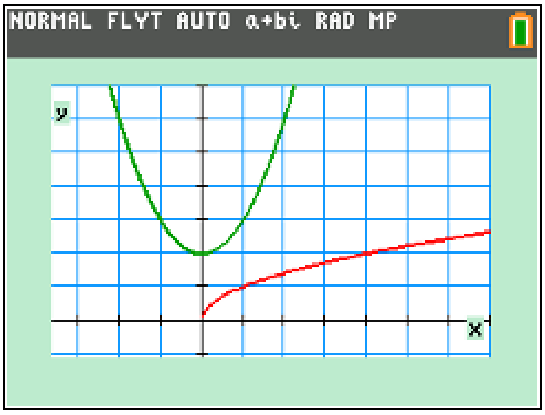
Det blir ju då 1,25, 1,75, 2,25, 2,75. Ändra nu till dessa värden i lista L1. Övriga listor uppdateras då.



L1	L2	L3	L4	L5
1.25	3.5625	1.7813	1.7813	------
1.75	5.0625	2.5313	4.3125	
2.25	7.0625	3.5313	7.8438	
2.75	9.5625	4.7813	12.625	
------	------	------	------	

L1(5)=

Vi får et väldigt bra närmevärde.



Det visar sig att mittpunktsmetoden *alltid* ger ett för *litet* värde för andragardskurvan ovan. Det beror på att kurvan har en konvex böjning ("glad mun"), dvs andraderivatan är positiv. Om andraderivatan är negativ blir det tvärtom.

Funktionen $y = x^2 + 2$ har positiv andraderivata medan funktionen $y = \sqrt{x}$ har negativ andra-derivata. Se figur ovan. Visa att en numerisk beräkning på integralen till funktionen $y = \sqrt{x}$ ger ett för stort värde. Gör beräkningen med fyra delintervall och du ska, som förut, beräkna arean under kurvan mellan x = 1 och x = 3. Det exakta värdet på arean är $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$. Ett närmevärde med fem decimaler är 2,79743.

Trapetsmetoden

Det finns en annan metod som kallas *trapets-metoden*. Se figur nedan. Du ska nu bestämma den totala arean under kurvan. Den består ju av fyra parallelltrapetser.

Blir resultatet bättre eller sämre än det resultat du får med mittpunktsmetoden?