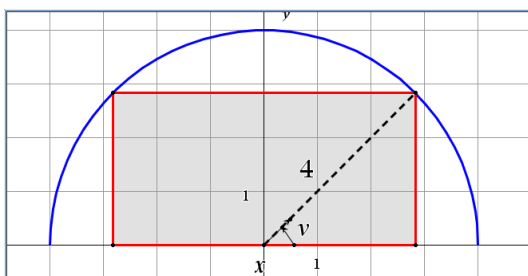


Största omkrets och area

Största omkretsen

I en halvcirkel med radien 4 dm är en rektangel inskriven. Vi har infört beteckningar i illustrationen nedan.

Teckna uttryck för rektangelns omkrets och bestäm det värde på x (rektangelns bas) respektive v som ger den största möjliga omkretsen. Du ska använda 2 metoder alltså. Ange också denna största omkrets. Du ska lösa dina uppgifter både numeriskt och exakt.



Vi löser nu uppgiften grafiskt numeriskt och vi visar lösningen där du beräknar det värde på rektangelns bas som ger den största omkretsen.

Lösning:

Vi börjar alltså beräkningarna utifrån rektangelns bas x . Om höjden hos rektangeln är h ger Pythagoras sats

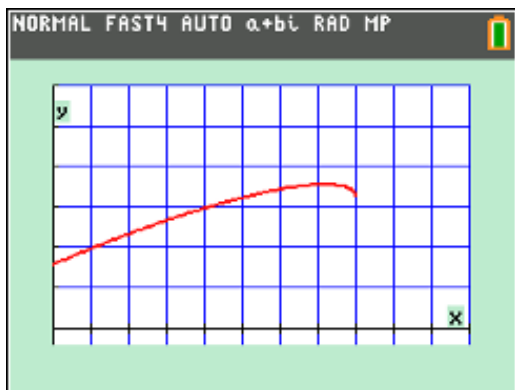
$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = 4^2$$

Vi löser nu ut h : $h = \frac{\sqrt{64-x^2}}{2}$

Detta gör att omkretsen, som är $2x + 2h$, är

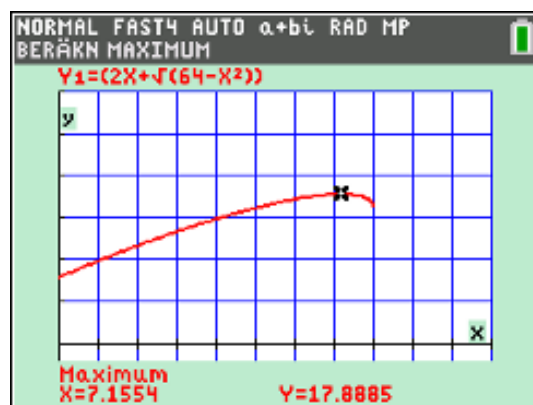
$$O = 2x + 2 \cdot \frac{\sqrt{64-x^2}}{2} \Rightarrow 2x + \sqrt{64-x^2}$$

Vi börjar med att plotta denna funktion som Y1.

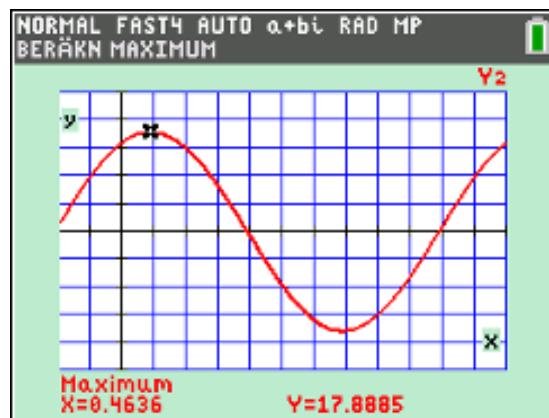


Vi ser att grafen plottas fram till $x=8$. Den är ju naturligtvis inte definierad för större x är så eftersom man då skulle få ett negativt värde på kvadratroten; $\sqrt{64-x^2}$ måste ju vara större än eller lika med noll.

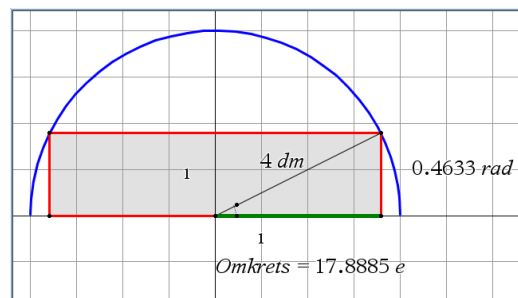
Om du trycker på $\boxed{2nd}\boxed{[calc]}$ får du upp en flik där du väljer 4:maximum. Följ sedan instruktionerna på skärmen. Vi får närmevärdet 7,16 dm på rektangelns bas och omkretsen blir då 17,89 dm.



Lös nu uppgiften där du beräknar det värde på vinkeln v som ger den största omkretsen. Vi visar inte denna lösning utan som stöd får du grafen för omkretsen där x är vinkeln i radianer. Vi ser att man får samma värde på omkretsen som med den andra metoden.



Så här ser den rektangel ut som har störst omkrets!



Lös nu uppgiften exakt med hjälp av derivata med båda metoderna.

Vi börjar med den första metoden där x är rektangelns bas:

Derivatan av $2x + \sqrt{64 - x^2}$ är $2 - \frac{x}{\sqrt{64 - x^2}}$.

Fortsätt nu beräkningarna och räkna ut för vilket x -värde derivatan är lika med noll. Du ska få

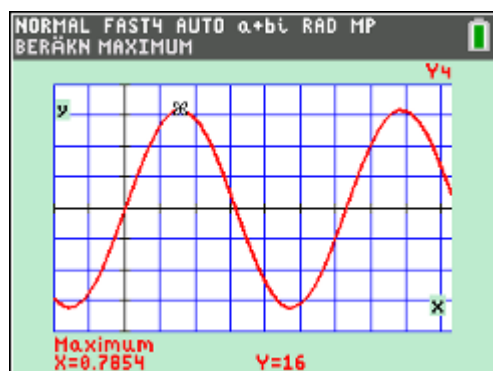
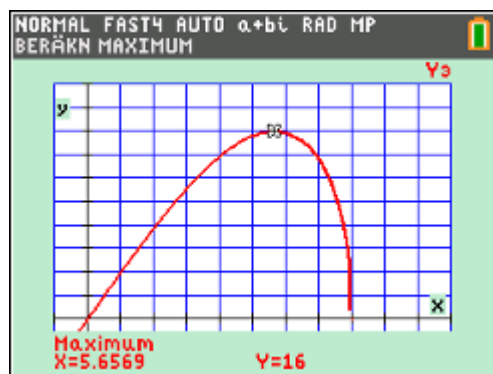
$$\text{värdet } x = \frac{16}{\sqrt{5}}.$$

Gör nu likadant där du söker den vinkel som ger den största omkretsen. Du ska alltså sedan tidigare ha härlett ett uttryck för omkretsen med vinkeln v som oberoende variabel.

Vad är bredd/höjd-förhållandet när omkretsen är maximal? Genomför beräkningarna! (Svar: $\frac{1}{4}$).

Största arean

Gör också motsvarande beräkningar för största *arean* också. Vi har här plottat 2 funktioner som visar hur arean beror av rektangelns bas respektive vinkeln v . Som du ser har vi "gömt" funktionsuttrycken. Dessa ska du ju härleda själv.



Gör nu också exakta beräkningar med hjälp av derivata. Precis som förut ska du beräkna största arean med

- basen x i rektangeln som oberoende variabel
- vinkel v (se fig.) som oberoende variabel.

Vilken beräkning var enklast?

Figuren visar rektangeln med maximal area

