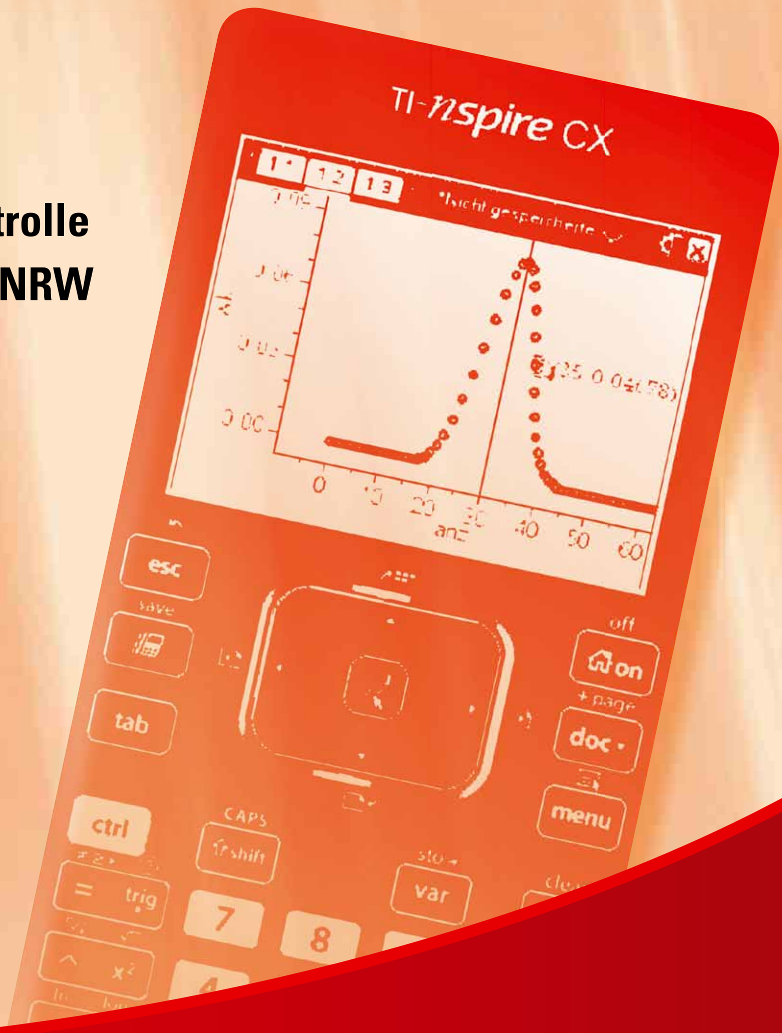
Materialien für
TI-Nspire CX ™ Handheld (GTR)
TI-Nspire ™ Software

Heinz Klaus Strick

Stochastik mit dem TI-Nspire ™ CX (GTR)



- **Arbeitsblätter**
- **Mit Übungsaufgaben zur Lernkontrolle**
- **Passend zur GTR-Verplichtung in NRW**
- **Auch für andere Bundesländer geeignet**

Texas Instruments

Ihre Erfahrung. Unsere Technologie. Mehr Lernerfolg.

Heinz Klaus Strick

Stochastik mit dem TI-Nspire ™ CX (GTR)

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Diese Sammlung von Arbeitsblättern für den Stochastikunterricht soll dazu anregen, die vielfältigen Möglichkeiten des **TI-Nspire™ CX** (GTR) auch im Rahmen des Stochastikunterrichts zu nutzen. Die Auswahl der Blätter erfolgte nach dem Gesichtspunkt, möglichst viele verschiedene Themen aus dem Stochastikunterricht – insbesondere aus Sekundarstufe II – anzusprechen, bei denen die Visualisierung der Ergebnisse wesentlich zum Verständnis beitragen kann.

Durch die getroffene Auswahl der Beispiele werden auch die Stärken des Rechners sichtbar, dessen Menü-Auswahl wegen ihrer Vielfalt beeindruckend ist. Damit diese Vielfalt aber nicht zum Problem für den Anfänger wird, sind die Arbeitsblätter so angelegt, dass die abgebildeten Screenshots eine Anleitung bieten, mit den Möglichkeiten zurecht zu kommen.

Zu den besonderen Möglichkeiten des TI-Nspire™ CX im Rahmen der Stochastik gehört die Nutzung des Geräts,

- als Taschenrechner (**Calculator**) mit zahlreichen Optionen einschl. dem Lösen von Gleichungssystemen sowie dem numerischen Lösen von Gleichungen,
- als Funktionsplotter (**Graphs**) mit den Werkzeugen zum anschaulichen Lösen von Gleichungen,
- als Tabellenkalkulationsprogramm (**Lists & Spreadsheet**) mit allen wichtigen Listenoperationen einschl. Regression,
- als Grafikprogramm zum Erstellen und Auswerten von Diagrammen der Beschreibenden Statistik (**Data & Statistics**)

Es wurde darauf verzichtet, das Eintippen von Tastenfolgen aufzulisten (die notwendigen Informationen entnehme man den herunterladbaren Handbüchern); andererseits werden durch die absichtlich große Anzahl von abgebildeten Screenshots die erforderlichen Einzelschritte zur Lösung eines Problems deutlich gemacht. Insofern können die Arbeitsblätter auch dazu dienen, bestimmte Funktionen des Rechners kennenzulernen. Screenshots ersetzen an vielen Stellen auch Erklärungen von Rechenvorgängen, da diese aus den Abbildungen entnommen werden können.

Die Arbeitsblätter können die Verwendung von Schulbüchern nicht ersetzen, da auf die Theorie nur im geringen Umfang und keinesfalls umfassend genug eingegangen werden kann; aus Gründen des Umfangs musste auch eine Auswahl an Fragestellungen getroffen werden, die nicht alle in den Lehrplänen enthaltenen Anforderungen abdeckt. Da jedoch sehr unterschiedliche Themen des Stochastikunterrichts angesprochen werden, werden Anregungen für weitere Einsatzmöglichkeiten des Rechners deutlich.

Die Arbeitsblätter können grob den drei Bereichen

- *Simulation*,
- *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Beurteilende Statistik* sowie
- *Erzeugen und Testen von Zufallszahlen* zugeoordnet werden.

Sie sind so aufgebaut, dass zunächst ein Problem (Beispiel-Aufgabe) gestellt wird, dessen Lösung anschließend mithilfe des TI-Nspire™ CX erfolgt. Am Ende eines Arbeitsblatts sind weitere Fragestellungen aufgeführt, die ähnlich wie die ausgeführte Lösung bearbeitet werden sollen. Die Lösungen der anfangs gestellten Aufgaben sind in der Regel so ausführlich, dass die Arbeitsblätter auch zum selbstständigen Lernen eingesetzt werden können; durch die Übungsaufgaben ist eine Kontrolle des Gelernten möglich.

Viel Freude bei der Arbeit mit dem **TI-Nspire™ CX**!

Leverkusen, im Januar 2013

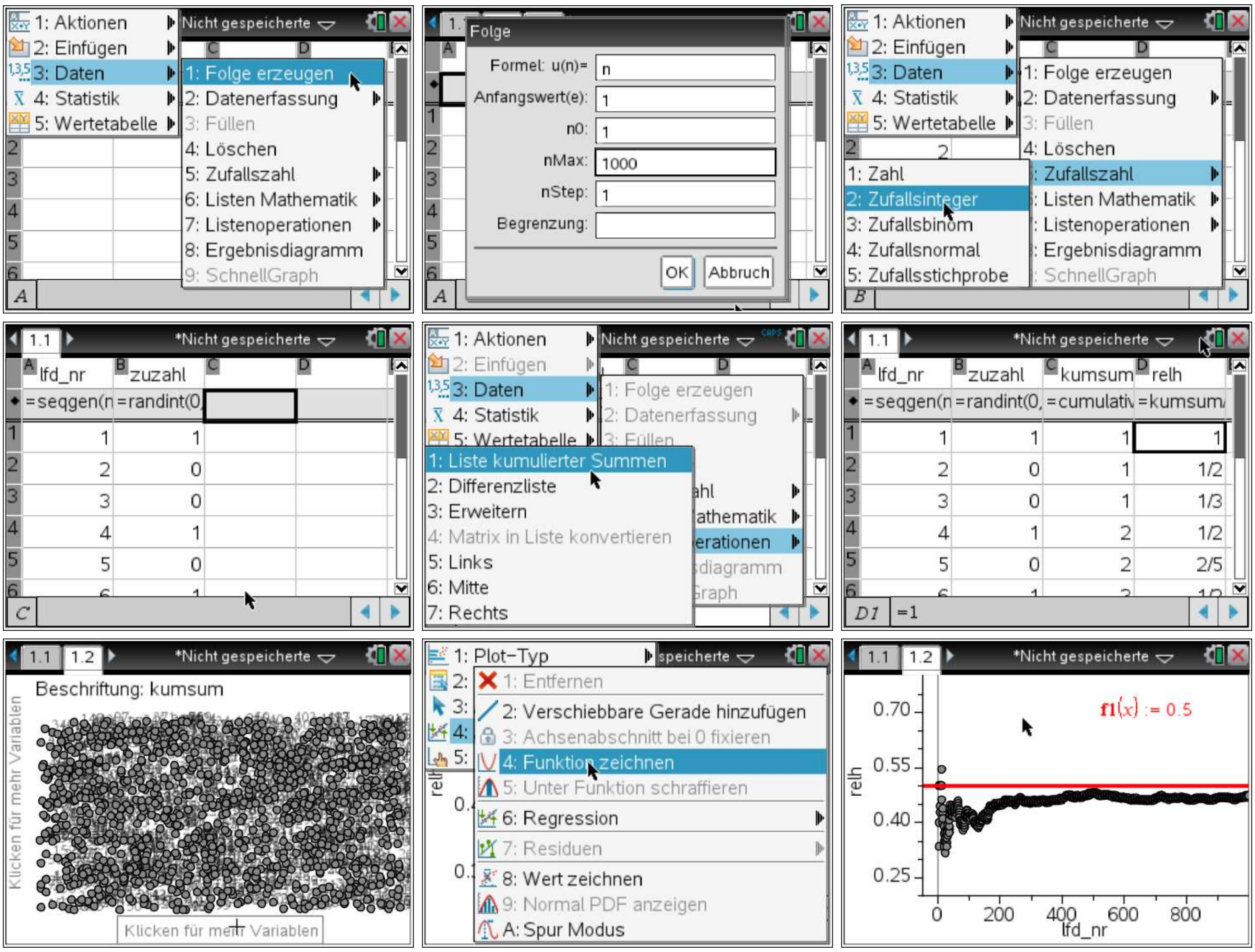
Heinz Klaus Strick

Simulation – Entwicklung von relativen Häufigkeiten darstellen

Mithilfe des Zufallszahlengenerators soll der 1000-fache Münzwurf simuliert werden.

Dazu öffnen wir ein Arbeitsblatt der Tabellenkalkulation *Lists & Spreadsheets*. Mithilfe der Menü-Option *3: Daten / 1: Folge erzeugen* werden die laufenden Nummern 1, 2, …, 1000 erzeugt und in Spalte A unter dem Namen *lfd_nr* abgespeichert, dann mit *randint(0,1,1000)* 1000 ganzzahlige Zufallszahlen (Nullen und Einsen) in Spalte B. Die kumulierten Werte der 0-1-Folge werden dann mithilfe der *7: Listenoperationen* in der Spalte C abgelegt. Das *k*-te Element der Spalte C gibt also an, wie viele Einsen bis zum *k*-ten Wurf einschließlich geworfen wurden. Die zugehörigen relativen Häufigkeiten der Anzahl der Einsen in Spalte D ergeben sich, wenn man in das Befehlsfeld den Befehl *kumsum/lfd_nr* eingibt.

Im *Data&Statistics*-Arbeitsblatt wählt man die Variablen für die horizontale und vertikale Achse (*lfd_nr* bzw. *relh*) sowie die Fenstereinstellungen. Man kann den aus 1000 Punkten bestehenden Graphen noch durch den zur zugehörigen Wahrscheinlichkeit *p* gehörenden Graphen *f1(x) = 0,5* ergänzen (Menü: *Analysieren, Funktion zeichnen*).



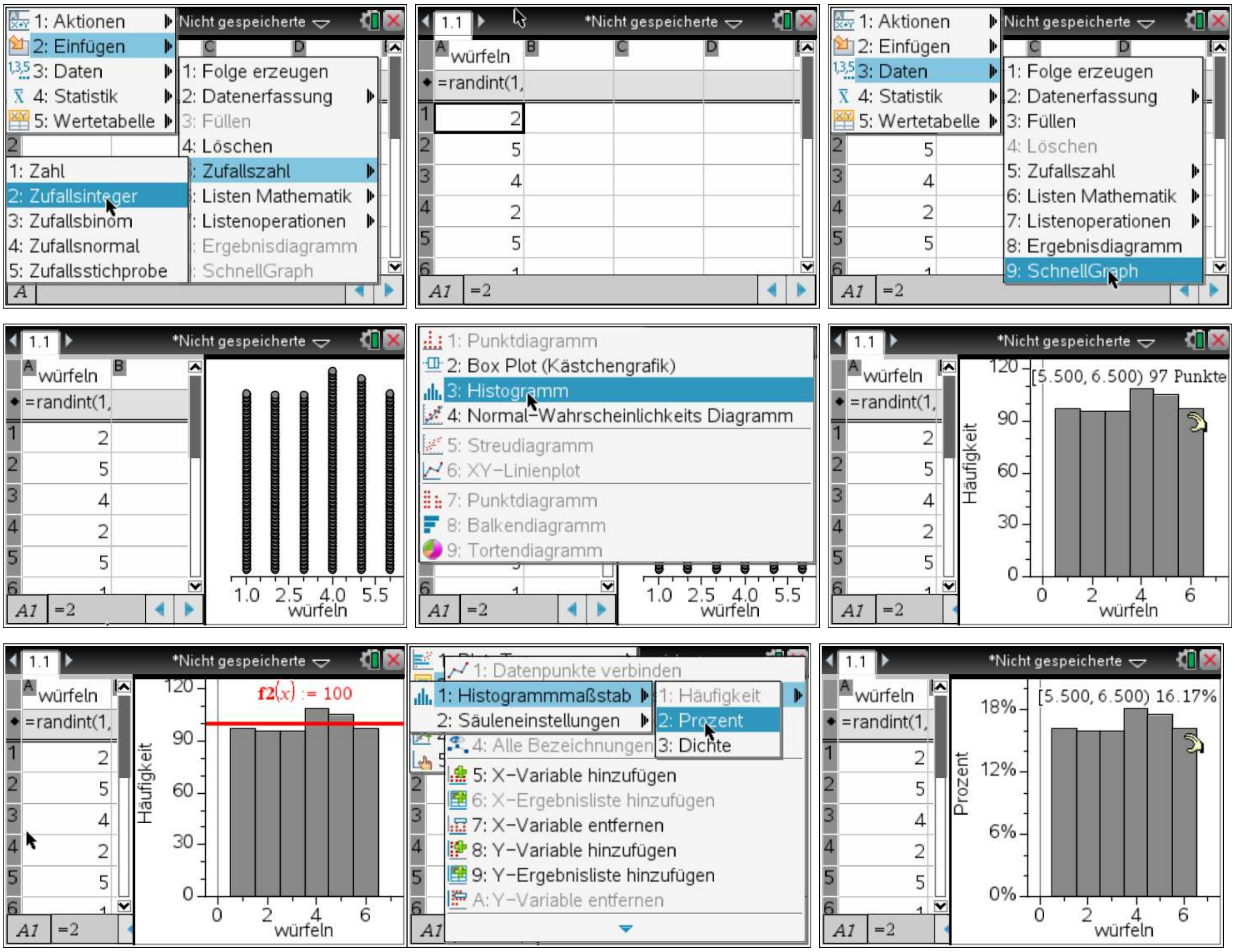
- Führen Sie die Simulation eines 600-fachen Würfelversuchs durch, und stellen Sie die Entwicklung der relativen Häufigkeiten der Anzahl der Sechsen dar.

Simulation – Bestimmung der absoluten Häufigkeiten der Ergebnisse

Mithilfe des Zufallszahlengenerators soll das 600-fache Würfeln simuliert werden.

Es soll ermittelt werden, wie oft die einzelnen Augenzahlen beim 600-fachen Würfen aufgetreten sind. Die 600 erzeugten Augenzahlen werden in Spalte A abgelegt. Durch die Option SchnellGraph wird ein Säulendiagramm erzeugt. Wenn die Darstellungsform eines Histogramms gewählt wird, entsteht automatisch eine Häufigkeitsachse. Die Höhen der einzelnen Säulen lassen sich ablesen, indem man mit dem Zeiger über die Säulen fährt. Zusätzlich kann zum besseren Vergleich eine Parallele zur *x*-Achse mit der erwarteten Häufigkeit ergänzt werden (Menü: *Analysieren, Funktion zeichnen*) oder auch die Anzeige der relativen Häufigkeiten in Prozent oder als Dezimalzahlen (*Dichte*).

Markiert man das Befehlsfeld und drückt die ctrl-Taste und dann die r-Taste, dann erneuert man eine Simulation.



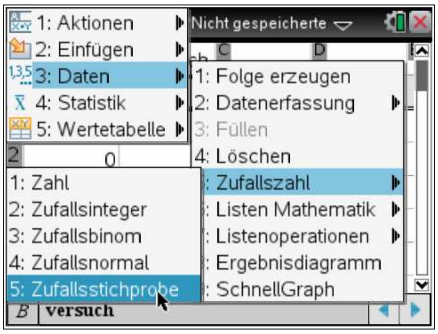
- Führen Sie eine 400-fache Simulation des Wurfs eines regelmäßigen Tetraeders durch, und bestimmen Sie die Häufigkeit, mit der die einzelnen Augenzahlen auftreten.

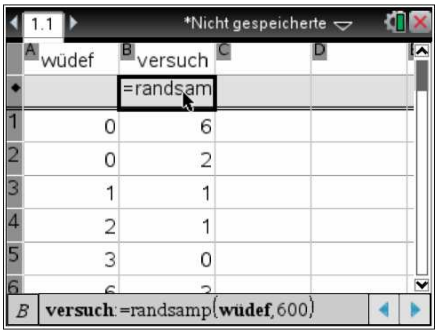
Experimente mit selbst beschrifteten Würfeln

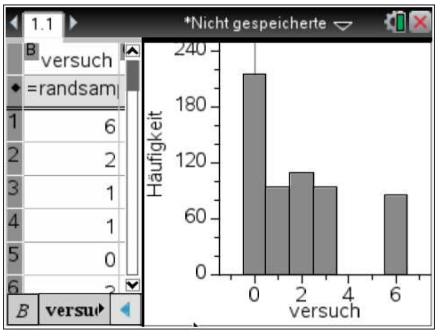
Ein selbst beschrifteter Würfel soll 600-mal geworfen werden.

Die Augenzahlen des selbst beschrifteten Würfels mit den Augenzahlen 0, 0, 1, 2, 3, 4 werden in Spalte A eingetragen (*wüdef*). Mithilfe der Daten-Option *5: Zufallszahl / 5: Zufallsstichprobe* (*randsamp*) wird festgelegt, dass die Liste von Daten aus Spalte A verwendet wird, um 600-mal eine Stichprobe zu ziehen (Ziehen mit Zurücklegen).

Wie im Arbeitsblatt Nr. 2 beschrieben, kann die Häufigkeitsverteilung in Form eines Histogramms dargestellt werden.

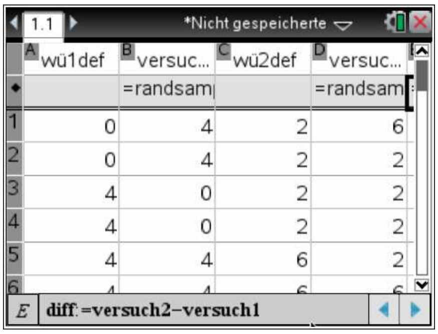


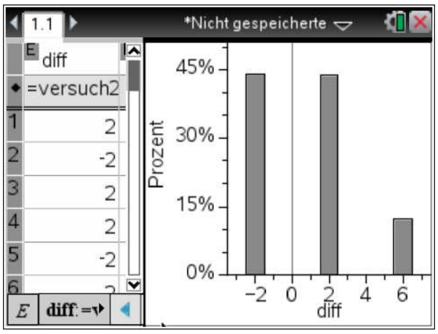




Den Vergleich der Augenzahlen zweier selbst beschrifteter Würfel kann man so durchführen, dass man jeweils die Differenz der Augenzahlen notiert.

Im folgenden Beispiel ist Würfel 1 mit den Augenzahlen 0, 0, 4, 4, 4, 4 mit Würfel 2 verglichen, auf dem die Augenzahlen 2, 2, 2, 6, 6, 6 eingetragen sind. Da die Differenz der Augenzahlen aus 600 Würfen erheblich häufiger positiv als negativ ausfällt, kann Würfel 2 als „günstiger" angesehen werden.





- Vergleichen Sie die EFRON'schen Würfel miteinander. Untersuchen Sie dazu jeweils die Häufigkeiten, mit denen bei dem einen Würfel eine höhere Augenzahl fällt als bei dem anderen. Die Würfel sind wie folgt beschriftet:

  Würfel 1: 0, 0, 4, 4, 4, 4; Würfel 2: 3, 3, 3, 3, 3, 3;

  Würfel 3: 2, 2, 2, 2, 6, 6; Würfel 4: 1, 1, 1, 5, 5, 5.

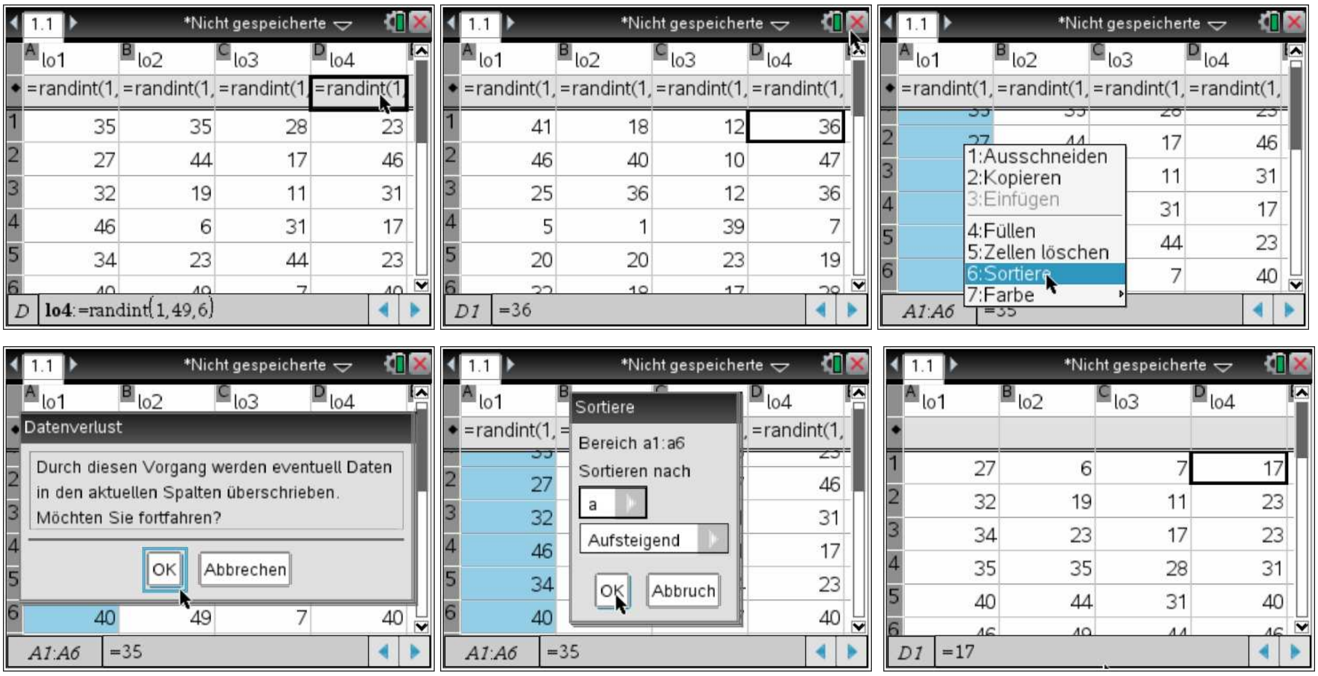
Ziehen mit Wiederholung

Mit dem Zufallszahlengenerator des GTR wird das Ziehen *mit* Wiederholung simuliert.

Benutzt man den Zufallszahlengenerator *randint*, um die Lottoziehung zu simulieren, dann kann es vorkommen, dass eine Zahl mehr als einmal gezogen wird, da der Befehl einen Ziehvorgang *mit* Zurücklegen simuliert.

Klickt man erneut auf das Befehlsfeld oder drückt man auf die ctrl-Taste, danach auf r, dann werden neue Zufallszahlen erzeugt.

Markiert man die erzeugten Zahlen, dann kann man diese sortieren, um einen besseren Überblick zu erhalten; durch den Sortiervorgang wird der erzeugende Befehl gelöscht.



- Simulieren Sie 20-mal das 6-fache Ziehen einer Lottozahl als Ziehen mit Zurücklegen. Wie oft kommt es vor, dass mindestens zwei der „gezogenen“ Lottozahlen übereinstimmen?

- Bestimmen Sie mithilfe der Pfadmultiplikationsregel die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Ziehen mit Zurücklegen *6 aus 49* lauter verschiedene Zahlen erhält. Vergleichen Sie den berechneten Wert mit dem Ergebnis der Simulation.

- Die Ziehung der Glückszahlen beim Lottospiel *3 aus n* soll mithilfe des *randint*-Befehls 20-mal simuliert werden. Bei welcher Anzahl *n* ist die Wahrscheinlichkeit für die mindestens zweifache Ziehung einer Zahl kleiner als 10 %?

Ziehung der Lottozahlen – Simulation des Rencontre-Problems (I)

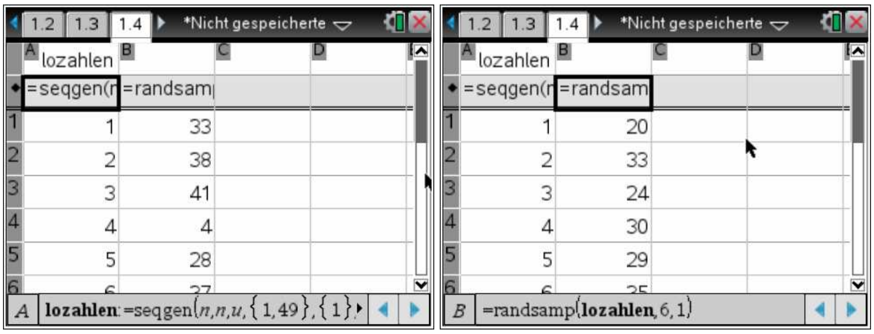
Um das Ziehen *ohne* Wiederholung zu simulieren, muss im *randsamp*-Befehl ein zusätzlicher Parameter eingefügt werden.

Verwendet man den *randsamp*-Befehl, um eine Zufallsstichprobe vom Umfang k vorzunehmen (vgl. Arbeitsblatt Nr. 3), dann werden aus der vorgegebenen *Liste*

– Ziehungen *mit* Wiederholung simuliert, wenn man nur *randsamp*($Liste$, k) eingibt,

– Ziehungen *ohne* Wiederholung simuliert, also tatsächliche Stichproben, wenn man zusätzlich den Wahrheitswert 1 eingibt: *randsamp*($Liste$, k, *1*).

Die Abbildungen zeigen, wie man die Lottoziehung simulieren kann.



- Simulieren Sie das *Genueser Lotto*, die „Mutter“ aller Lottospiele, mit *5 aus 90*.

Werden *alle* Elemente einer vorgegebenen Liste gezogen, dann ist durch die Stichprobennahme eine *Permutation* der Elemente der Liste vorgenommen worden. Durch Kopieren des Befehlsfelds der Spalte B kann man mehrere Permutationen gleichzeitig sichtbar machen.

Betrachtet man die Differenz zwischen den Elementen der ursprünglichen Liste und der permutierten Liste, dann kann man an der Differenz 0 leicht erkennen, wie viele Elemente an ihrer ursprünglichen Stelle stehen (Anzahl der Übereinstimmungen oder *Rencontre*).

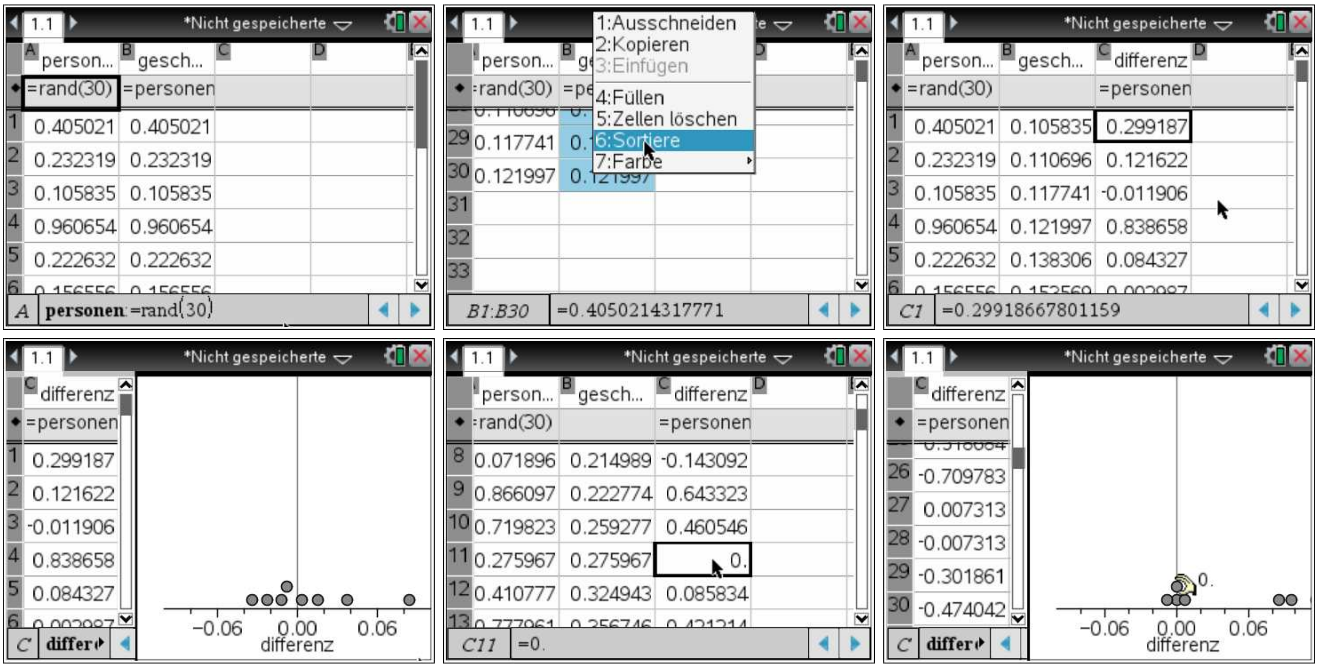
- Führen Sie 60 Simulationen der Permutation von 5 Zahlen durch und bestimmen Sie die Häufigkeitsverteilung des Merkmals *Anzahl der Übereinstimmungen mit der ursprünglichen Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5*.

Simulation des Rencontre-Problems (II)

Beim Weihnachtswichteln von 30 Personen kommt es vor, dass Person Nr. *k* das Geschenk Nr. *k* zieht, also ihr eigenes Geschenk. Eine solche Übereinstimmung bezeichnet man als *Rencontre*.

Mit dem Zufallszahlengenerator erzeugt man 30 Zufallszahlen aus dem Intervall [0 ; 1 [. Diese repräsentieren die Personen Nr. 1 bis Nr. 30. Solange die Geschenke noch nicht weitergegeben sind, werden auch die Geschenke durch diese Zufallszahlen charakterisiert (der Inhalt von Spalte B wird also durch den Befehl *geschenke := personen* erzeugt). Dann werden die Geschenke dadurch „sortiert“, dass sie aus dem Bescherungssack gezogen werden. Bildet man die *Differenz := personen – geschenke*, dann tritt die Differenz 0 auf, wenn eine Person ihr eigenes Geschenk zieht.

Man kann nun die Zahlen in Spalte C anschauen und überprüfen, ob die Differenz null auftritt, oder man visualisiert die Differenz mithilfe des Schnellgraphs, wobei man die horizontale Achse zoomen muss, um die Differenz null von betraglich kleinen Differenzen unterscheiden zu können.

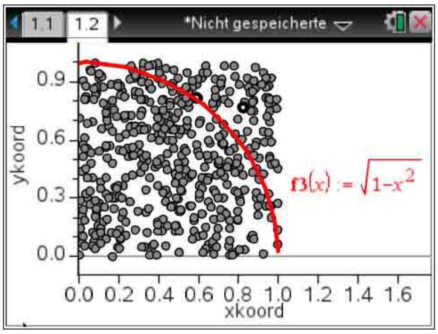


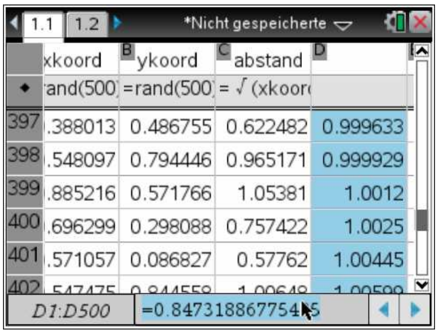
- Führen Sie die Rencontre-Simulation für 10 Geschenke mehrfach durch, und zählen Sie, wie oft das Ereignis *mindestens eine Übereinstimmung* (*Rencontre*) eintritt.
  Tragen Sie die Ergebnisse anderer Simulationen zusammen und ermitteln Sie so einen Schätzwert für die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *mindestens ein Rencontre*.

- Bestimmen Sie einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit für *mindestens ein Rencontre* beim Anordnen von 5 Zahlen. Bestimmen Sie auch die exakte Wahrscheinlichkeit.

Zufallsregen – Bestimmen eines Schätzwertes für π

	Mithilfe des *rand*-Befehls erzeugt man die *x*- und die *y*-Koordinaten von 500 Punkten im Einheitsquadrat ($0 \le x,\ y \le 1$). Der Abstand der Punkte vom Ursprung wird mithilfe des Satzes von PYTHAGORAS berechnet (Spalte C). Man kann dann überprüfen, wie viele von diesen Punkten einen Abstand vom Ursprung haben, der kleiner ist als 1, indem man die Liste mit den Abständen in Spalte D kopiert und diese Liste sortiert. In der hier dargestellten Simulation zeigt sich, dass 398 der 500 Punkte innerhalb des Viertelkreises mit Radius 1 liegen, vgl. Abb. 3.
	In der grafischen Darstellung des zugehörigen *Data&Statistics*-Arbeitsblatts sind die 500 Punkte sowie der Viertelkreis mit Radius 1 abgebildet (vgl. Abb. 1).





- Bestimmen Sie den *Anteil* der Punkte, die innerhalb des Viertelkreises liegen. Welcher Schätzwert ergibt sich hieraus für π?

- Wiederholen Sie die Erzeugung der Zufallspunkte und die Abfrage, so dass Sie insgesamt 1000 Punkte im Einheitsquadrat erzeugt haben. Welcher Schätzwert für π ergibt sich jetzt?

Machen Sie eine Prognose (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %): Mit welcher relativen Häufigkeit wird ein Zufallspunkt im Viertelkreis liegen, wenn

n = 2000:

n = 3000:

n = 4000:

n = 5000:

n = 10000:

Das klassische Geburtstagsproblem

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter *n* zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben? Wie groß muss *n* gewählt werden, damit es sich lohnt darauf zu wetten?

Zur Lösung der Frage betrachtet man das Gegenereignis *Die n Personen haben lauter verschiedene Geburtstage*. Die Wahrscheinlichkeitsberechnung kann dann iterativ erfolgen. Im *Lists&Spreadsheet*-Arbeitsblatt wird zunächst in Spalte A die Anzahl *n* der betrachteten Personen als Zahlenfolge erzeugt (hier: von 1 bis 50), dann in Spalte B die Rekursionsformel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis:

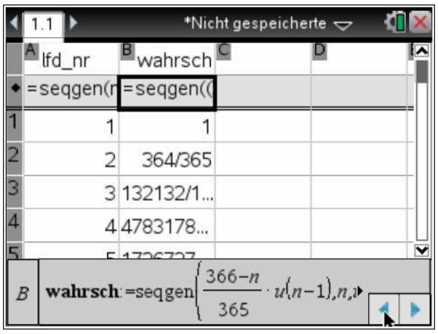
$$P(n \text{ Personen haben verschiedene Geburtstage}) = \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{366-n}{365},$$

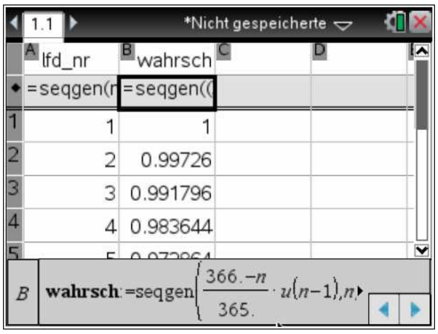
was zur Rekursionsformel für den GTR führt:

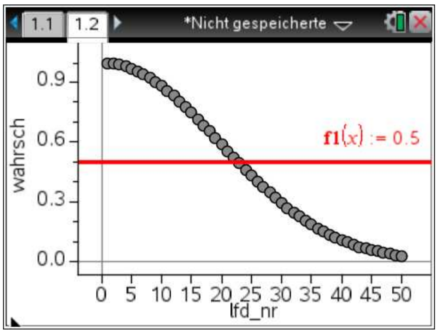
$$u(n) = \frac{366-n}{365}\cdot u(n-1),\ n \in \{1, 2, \ldots, 50\}$$

Verwendet man in der Rekursionsformel die Dezimalzahlen 365. und 366., dann werden die Wahrscheinlichkeiten als Dezimalzahlen angegeben.

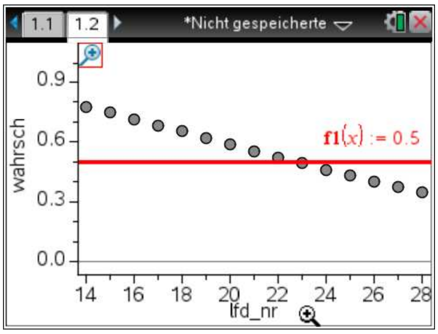
Die grafische Darstellung des zugehörigen *Data&Statistics*-Arbeitsblatts zeigt die Abnahme der Wahrscheinlichkeiten. Aus dem gezoomten Koordinatensystem kann man ablesen, dass für *n* = 23 die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *n Personen haben verschiedene Geburtstage* kleiner ist als 50 %, d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis *Unter n Personen haben mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag* ist dann größer als 50 %.







- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach *n* Würfen mit einem regelmäßigen Ikosaeder mindestens eine Augenzahl doppelt gefallen ist? Von welcher Anzahl *n* lohnt es sich darauf zu wetten? Wie würde ein vorsichtiger Wetter verfahren?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter *n* zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei im gleichen Monat Geburtstag haben? Wie groß muss *n* gewählt werden, damit es sich lohnt darauf zu wetten?



Simulation des Geburtstagsproblems

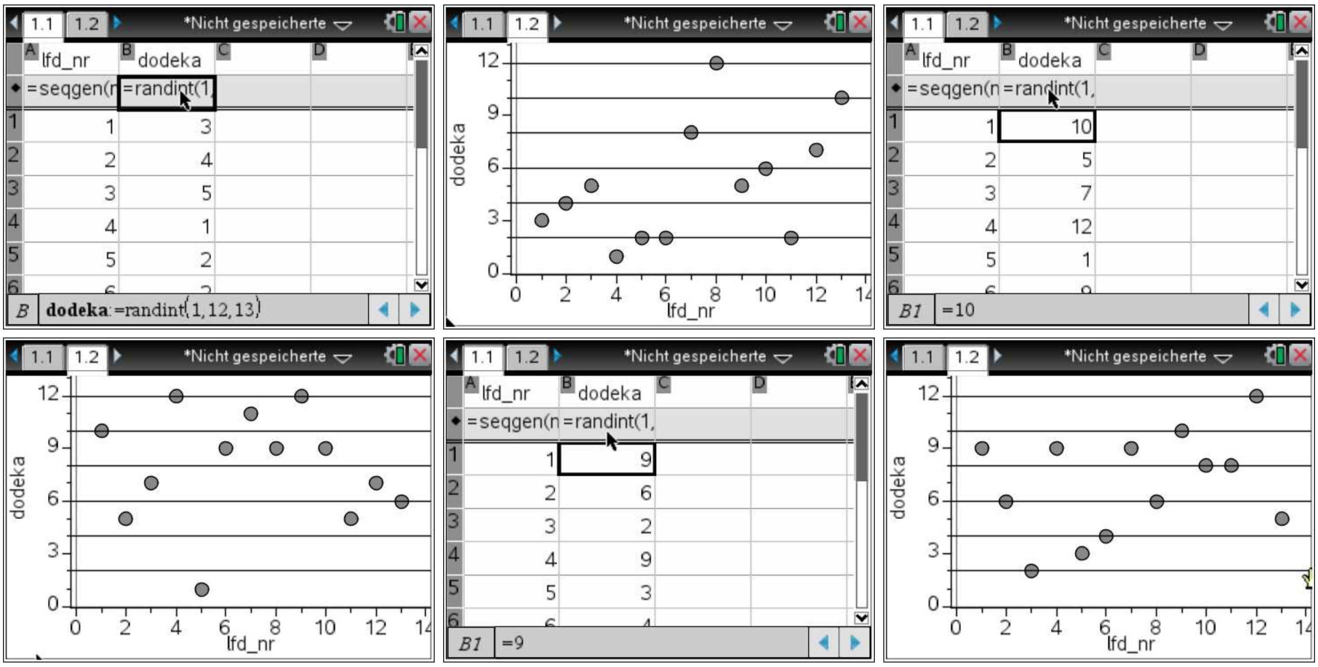
Beim klassischen Geburtstagsproblem geht es allgemein um die überraschend schnelle Wiederholung von Zufallszahlen (sogenannte *Kollision*).

Am Beispiel des Dodekaederwurfs kann man demonstrieren, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Kollision bereits für n = 5 größer ist als 50 %.

Dazu werden mithilfe des Zufallszahlengenerators 13 Dodekaederwürfe simuliert (denn spätestens nach 13 Würfen muss es eine Wiederholung geben) und in Spalte B eingetragen. In Spalte A wird die laufende Nummer notiert.

Um eine neue Simulation durchzuführen, muss das Befehlsfeld der Spalte B angeklickt und ctrl-r eingegeben werden; die zugehörige Grafik ändert sich dann automatisch.

Die grafische Darstellung erfolgt in einem Koordinatensystem, in das zusätzlich noch Parallelen zur x-Achse eingetragen sind (als Graphen von konstanten Funktionen; der Funktionsterm wurde entfernt).

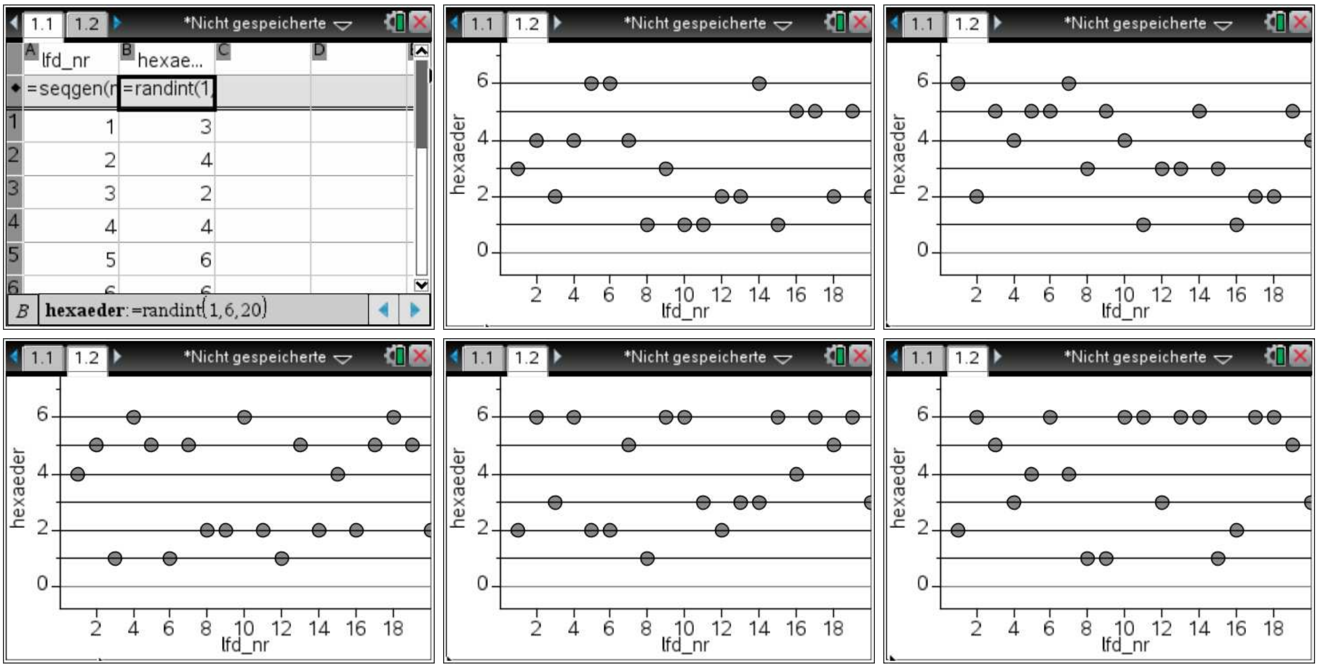


- Erläutern Sie, wie man an den Darstellungen erkennen kann, ob und wann eine „Kollision“ eingetreten ist.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass bereits nach fünf Würfen eines Dodekaeders eine Kollision eingetreten ist, beträgt 61,8 %. Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der relativen Häufigkeit, die sich aus 20 Simulationen ergibt.

Simulation des Sammelbilder-Problems

Beim klassischen Sammelbilder-Problem geht es um die Frage, wie viele Versuche benötigt werden, bis alle Sammelbilder einer Serie gezogen worden sind. Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass man genau *k* Versuche benötigt, bis jedes der *n* gleich-wahrscheinlichen Ergebnisse eines Zufallsversuchs mindestens einmal aufgetreten ist, sind aufwändige Rechnungen erforderlich (vgl. Arbeitsblatt Nr. 38).

	Am Beispiel des Hexaederwurfs kann man sich verdeutlichen, dass in der Regel mehr als 12 Würfe benötigt werden, bis jede der Augenzahlen mindestens einmal aufgetreten ist. Dazu werden mithilfe des Zufallszahlengenerators 20 Hexaederwürfe simuliert und in Spalte B eingetragen. In Spalte A ist die laufende Nummer notiert.
	Die grafische Darstellung erfolgt in einem Koordinatensystem, in das zusätzlich noch Parallelen zur *x*-Achse eingetragen sind (als Graphen von konstanten Funktionen; der Funktionsterm wurde entfernt).



- Bei welchen der dokumentierten Beispiele liegt nach 20 Würfen eine vollständige Serie vor?
- Führen Sie die Simulation des 20-fachen Würfelns 50-mal durch und überprüfen Sie, wie oft nach 12 Würfen [15 Würfen, 18 Würfen] eine vollständige Serie vorliegt.

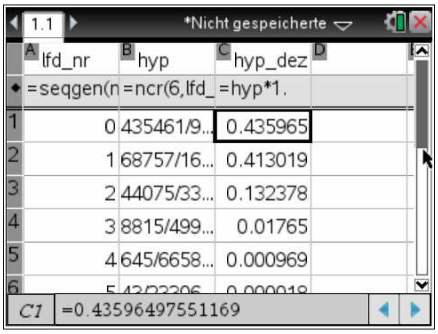
Hypergeometrische Verteilung – Wahrscheinlichkeit für Lotto-Gewinne

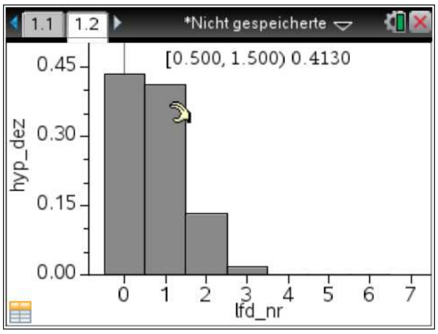
Die Wahrscheinlichkeit, im Lottospiel *6 aus 49* genau *k* richtige Tipps zu haben, beträgt $P(X=k)=\frac{\binom{6}{k}\cdot\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$. Binomialkoeffizienten werden mithilfe des *nCr*-Befehls erzeugt.

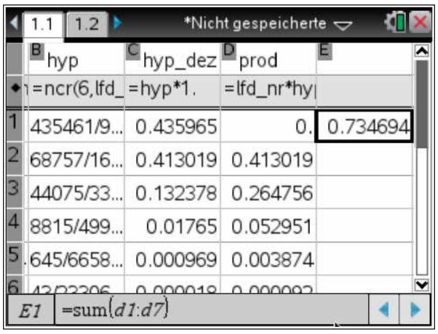
In Spalte A werden die möglichen Werte der Zufallsgröße X: *Anzahl der Richtigen* eingetragen (hier als Folge erzeugt) , in Spalte B wird die zugehörige Wahrscheinlichkeit berechnet, indem man im Befehlsfeld den Term eingibt (in Spalte C die Wahrscheinlichkeiten als Dezimalzahlen).

Der Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet sich als Summe von Produkten aus benachbarten Zellen der Spalten A und C. In Spalte D werden die Produkte gebildet, die Summe der Elemente von Spalte D ist in Zelle E1 angegeben. Im Mittel kann man 0,73 Richtige erwarten!

Die grafische Darstellung erfolgt als Histogramm. Geht man mit dem Zeiger über die Rechtecke, dann kann man die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ablesen.







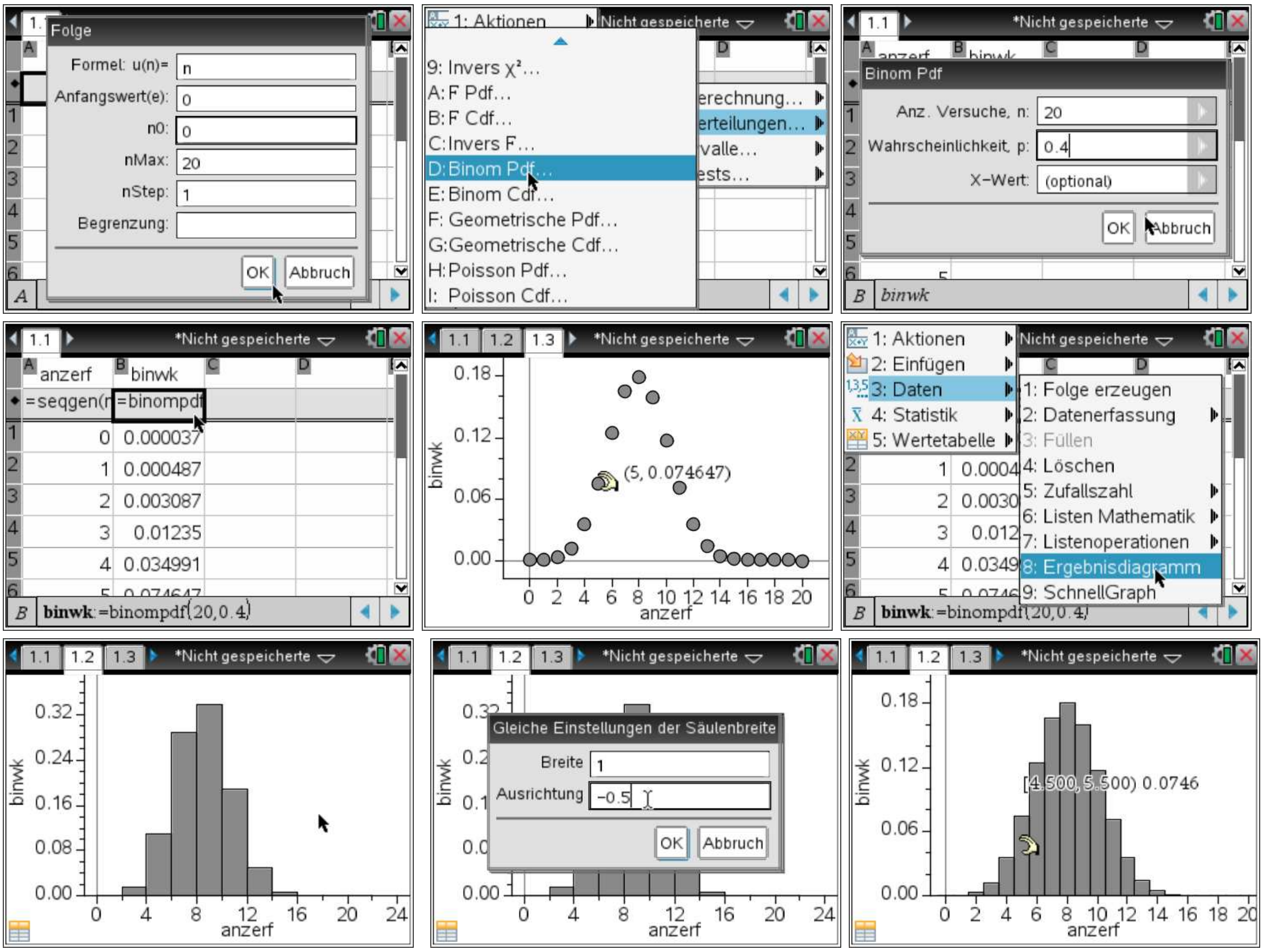
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler beim Austeilen der Karten im Skatspiel 0, 1, 2, 3, 4 Asse erhält.

- In einem Kurs sind 15 Mädchen und 10 Jungen; eine Stichprobe vom Umfang 5 wird genommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Zusammensetzungen der Stichprobe.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Stichprobe repräsentativ, d. h., werden genau 3 Mädchen und 2 Jungen gezogen?

Binomialverteilung – grafische Darstellung

Binomialverteilungen sind als *statistische Verteilungen* im Menü aufrufbar.

	Wenn man die vollständige Verteilung haben möchte, muss man in Spalte A die möglichen Werte von k erzeugen (als Folge der natürlichen Zahlen von 0 bis n), in Spalte B über Menü *4: Statistik* / *2: Statistische Verteilungen* zu *D: Binom Pdf* die zugehörigen Werte der Verteilung.
	Die grafische Darstellung erfolgt als Punktdiagramm. Geht man mit dem Zeiger über die Punkte, dann kann man die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ablesen. Wenn man die Verteilung als Ergebnisdiagramm in Form eines Histogramms darstellen möchte, muss beachtet werden, dass die Einstellung der Säulenbreite (= 1) und der Ausrichtung (= Lage des ersten Rechtecks) stimmt (um in dieses Menü zu kommen, muss man auf ctrl und Menü tippen = Maus-Rechtsklick).



- Bestimmen Sie die Binomialverteilung für n = 50 und p = 0,3 und stellen Sie diese mithilfe eines Histogramms dar.

Formel zur Berechnung des Erwartungswerts einer Binomialverteilung

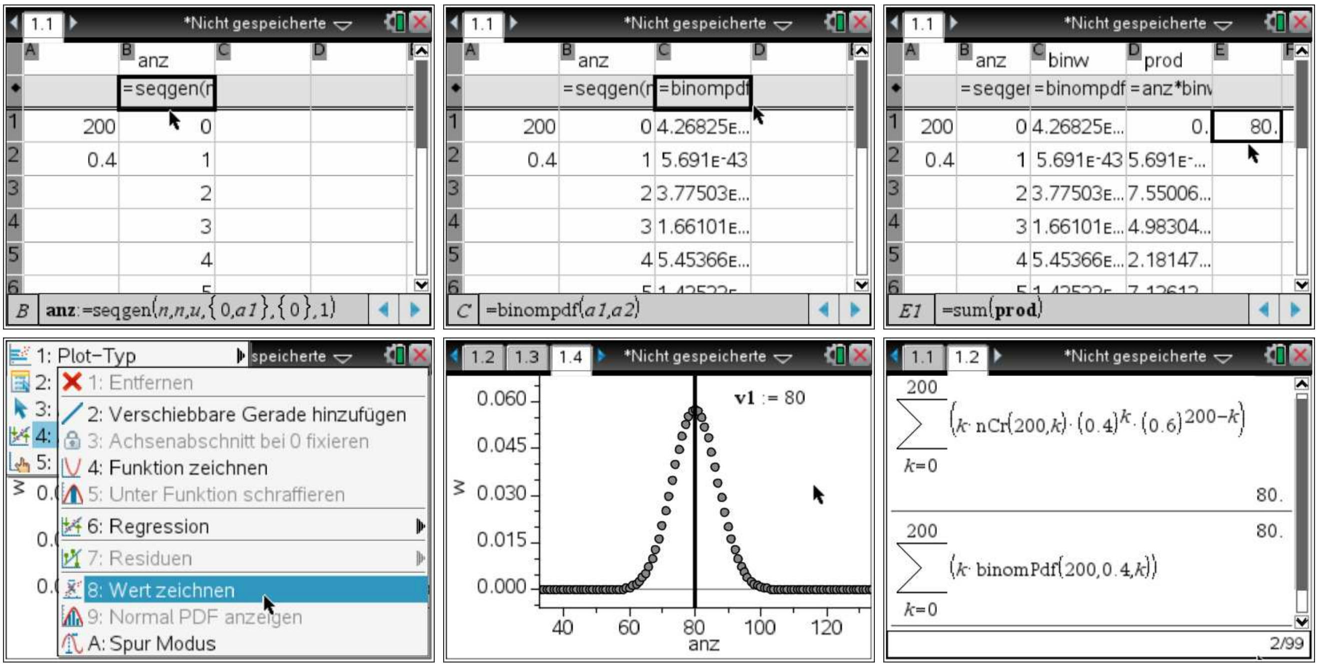
Der Erwartungswert μ einer Zufallsgröße ist allgemein definiert als das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der Werte der Zufallsgröße, bei Binomialverteilungen also als

$$\mu = E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot binompdf(n,p,k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Der Erwartungswert der Binomialverteilung mit n = 200 (vgl. *Zelle A1*) und p = 0,4 (vgl. *Zelle A2*) berechnet sich als Summe von Produkten aus benachbarten Zellen der Spalten B und C. In Spalte D werden die Produkte gebildet, die Summe der Elemente von Spalte D ist in Zelle E1 angegeben. Im Mittel kann man 80 Erfolge erwarten, was gemäß der Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit plausibel ist.

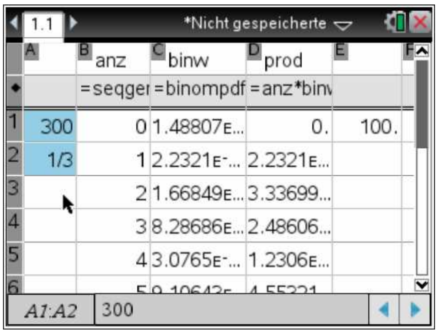
Dies stimmt auch mit dem Maximum der Verteilung überein (in das Punktediagramm ist zusätzlich noch die Gerade mit x = 80 eingezeichnet).

Hinweis: Der Erwartungswert einer Binomialverteilung kann auch direkt mit dem *Calculator* berechnet werden.



- Berechnen Sie für verschiedene Werte von n und p jeweils den Erwartungswert E(X) gemäß Definition und bestätigen Sie so die gültige Berechnungsformel: μ = E(X) = $n \cdot p$.

Beachten Sie: Zur Berechnung müssen nur die Werte in den Zellen A1 und A2 geändert werden.



Kumulierte Binomialverteilung

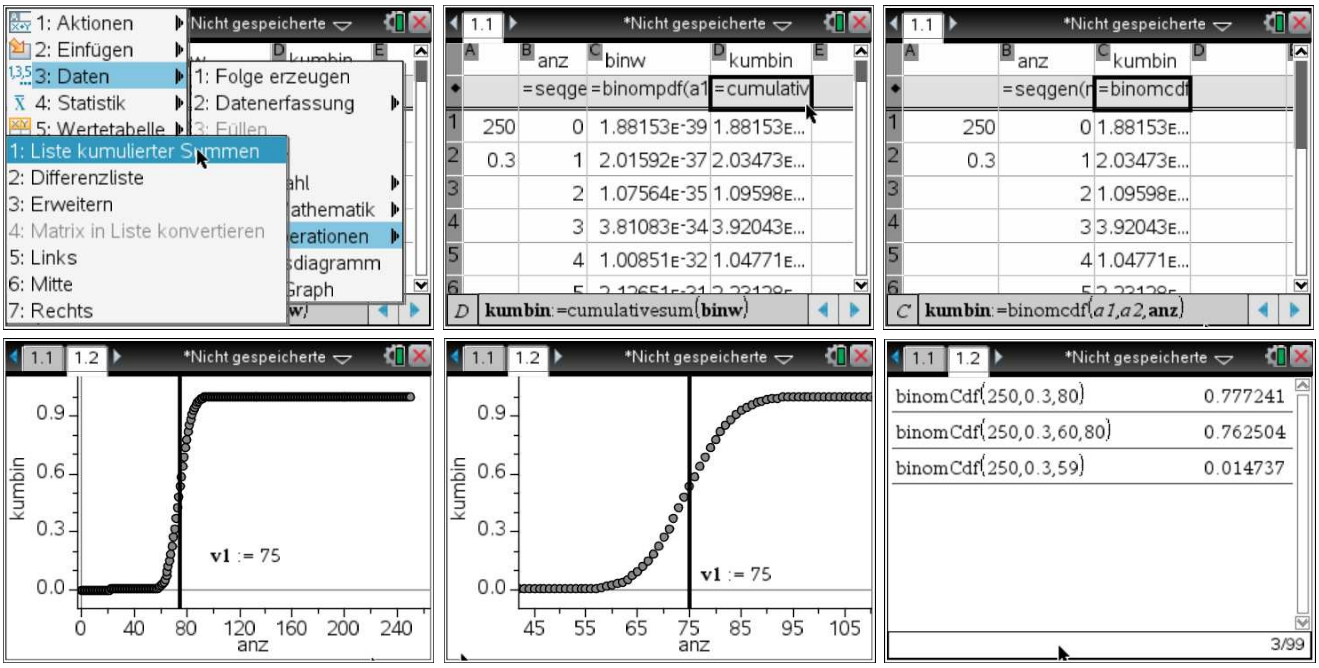
Die kumulierte Binomialverteilung entsteht durch Kumulieren der Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung.

Möglichkeit 1: Man berechnet zunächst die Werte der Binomialverteilung (*binompdf*) und kumuliert dann diese Wahrscheinlichkeiten (direkt den Befehl *cumulativesum* eingeben oder über den *Daten*-Befehl *7: Listenoperationen / 1: Liste kumulierter Summen*, vgl. Abben. 1 und 2.

Möglichkeit 2: Man gibt den Befehl *binomCdf* direkt ein, vgl. Abb. 3.

Der abgebildete Graph zeigt, dass die Zufallsgröße X: *Anzahl der Erfolge* zwar theoretisch alle Werte 0, 1, …, *n* annehmen kann, dass aber Ergebnisse in der Nähe des Erwartungswerts die größten Wahrscheinlichkeiten haben (am kumulierten Graphen daran zu erkennen, dass die Wahrscheinlichkeiten in einer vergleichsweise kleinen Umgebung um µ von der kumulierten Wahrscheinlichkeit 0 auf die kumulierte Wahrscheinlichkeit 1 anwachsen.

Man beachte: Ruft man den binomcdf-Befehl über das Menü auf (4: Statistik / 2: Statistische Verteilungen / E: BinomCdf), dann erscheint eine Eingabemaske, in man eine untere und eine obere Intervallgrenze eingeben <u>muss</u>. Gibt man den Befehl direkt ein, dann <u>kann</u> man eine untere Grenze eingeben, muss es aber nicht. (Um Intervall-Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, muss man also nicht wie bei anderen Rechnern Differenzen bilden.)



- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für

n = 200, p = 0.4:

P(70 ≤ X ≤ 85) =	P(X > 75) =
P(X ≤ 90) =	P(X ≥ 81) =
P(X < 78) =	P(75 ≤ X < 85) =

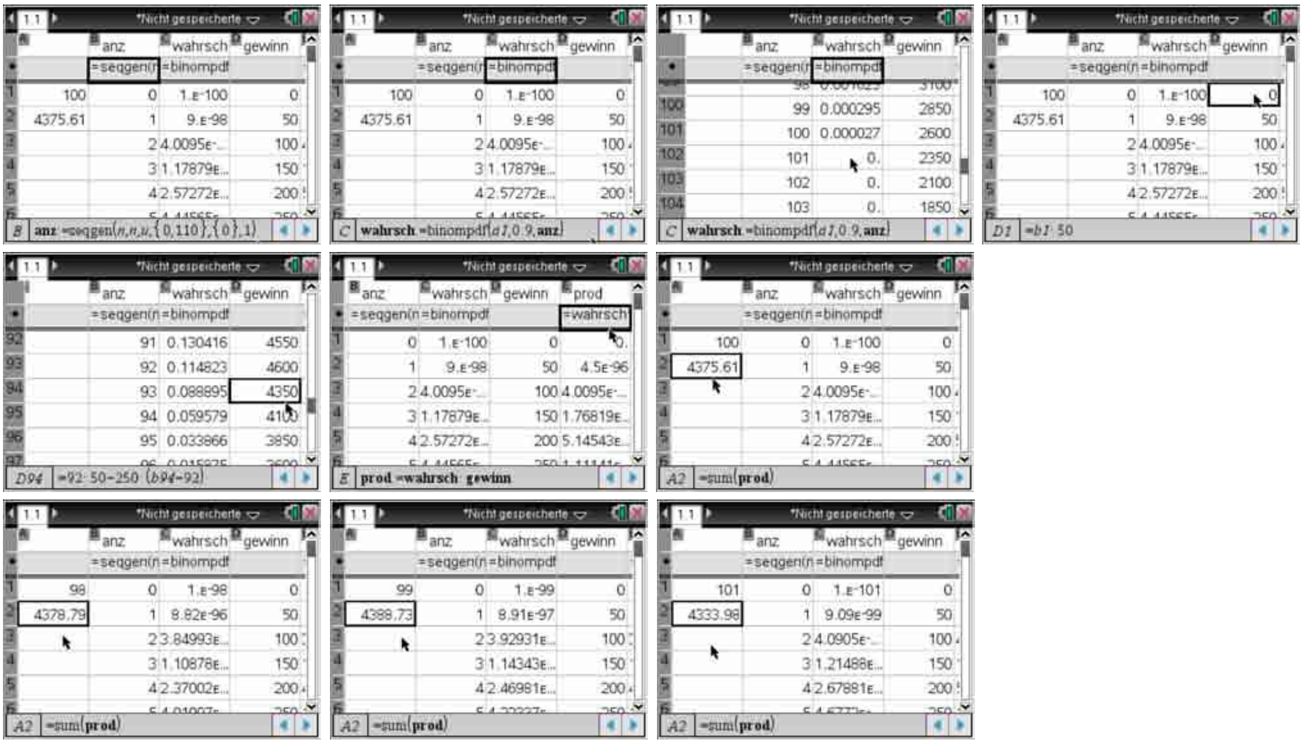
Optimierungsproblem mit zugrunde liegender Binomialverteilung

Wegen der Kapazität der eingesetzten Flugzeuge können für eine bestimmte Flugverbindung maximal 92 Plätze gebucht werden. Dennoch nimmt die Fluggesellschaft mehr Buchungen an, da im Mittel 10 % der Buchungen nicht wahrgenommen werden. An jeder Buchung verdient die Fluggesellschaft 50 € (auch bei den Fluggästen, die nicht erscheinen, denn diese müssen eine *No-Show*-Gebühr zahlen). Falls eine Buchung angenommen wurde, aber der Passagier nicht mitfliegen kann, muss nach EU-Recht eine Entschädigung von 250 € gezahlt werden. Bei welcher Anzahl von Buchungen ist der Gewinn der Fluggesellschaft maximal?

(Aufgabe entnommen aus *Elemente der Mathematik*)

Das Tabellenblatt wird so angelegt, dass die Anzahl der angenommenen Buchungen in Zelle a1 eingetragen wird, z. B. 100. In Spalte B wird eine fortlaufende Nummerierung erzeugt, und zwar über 100 hinaus, damit die Anzahl der vorgenommenen Buchungen auch erhöht werden kann (vgl. Abb. 1).
In Spalte C wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass genau k Buchungen tatsächlich durchgeführt werden; für k ≥ a1 ergibt sich die Wahrscheinlichkeit 0 (vgl. Abben. 2 und 3).
In Spalte D wird der Gewinn berechnet, und zwar für k ≤ 92 durch G(k) = k · 50 und für k > 92 durch G(k) = k · 50 – (k – 92) · 250; diese Definition wird jeweils in Zelle d1 bzw. d94 eingegeben und mit drag&drop auf die tiefer liegenden Zellen übertragen. In Spalte E wird dann das Produkt von Gewinn und zugehöriger Wahrscheinlichkeit berechnet, und die Summe in Zelle a2 sichtbar gemacht.

Durch Variation der Werte in Zelle a1 findet man heraus, dass der größte Gewinn bei n = 99 angenommenen Buchungen zu erwarten ist.



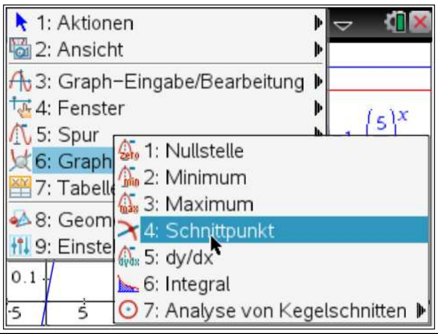
- Bestimmen Sie die optimale Anzahl von akzeptierten Buchungen für eine Maschine mit 200 Plätzen.

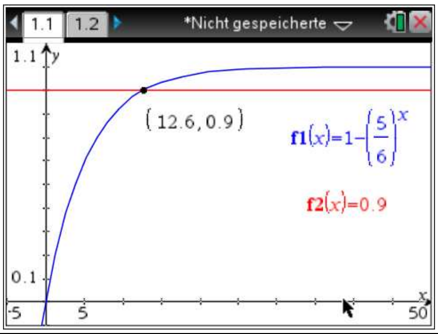
Mindestens *ein* Erfolg bei einem n-stufigen BERNOULLI-Versuch

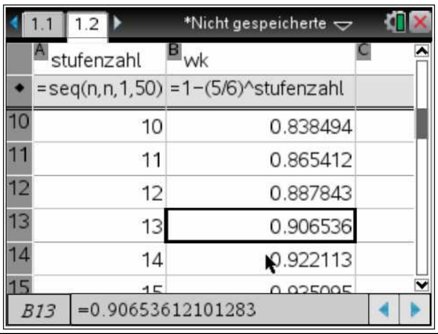
Das Ereignis *Mindestens ein Erfolg* ist das Gegenereignis zum Ereignis *Lauter Misserfolge*, d. h. zum Ereignis *Kein Erfolg*.

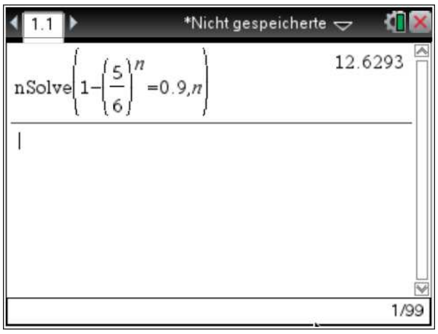
Beispiel: *Wie oft muss ein Würfel mindestens geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Sechs gefallen ist?*

	Die Wahrscheinlichkeit für *keinmal Augenzahl 6* beim n-fachen Würfeln ist $P(X = 0) = (5/6)^n$. Daher betrachtet man den Graphen der Funktion f1 mit $f1(x) = 1 - (5/6)^n$; sowie den Graphen der vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit f2 mit $f2(x) = 0.9$ und bestimmt mithilfe der *Option 6: Graph analysieren / 4: Schnittpunkt* die gesuchte Mindestanzahl: $n \geq 12.6$, d. h. $n \geq 13$.
	Alternativ erstellt man eine Wertetabelle mithilfe der Tabellenkalkulation *Lists&Spreadsheet.* Man kann ablesen, dass für eine Stufenzahl von n = 13 die vorgegebene Wahrscheinlichkeit von 90 % überschritten wird.
	Als weitere Alternative bietet sich die Verwendung des numerischen Gleichungslösers (Menü: *3 Algebra / 1: Numerisch lösen*) an, durch den die Lösung $n \approx 12.63$ gefunden wird.







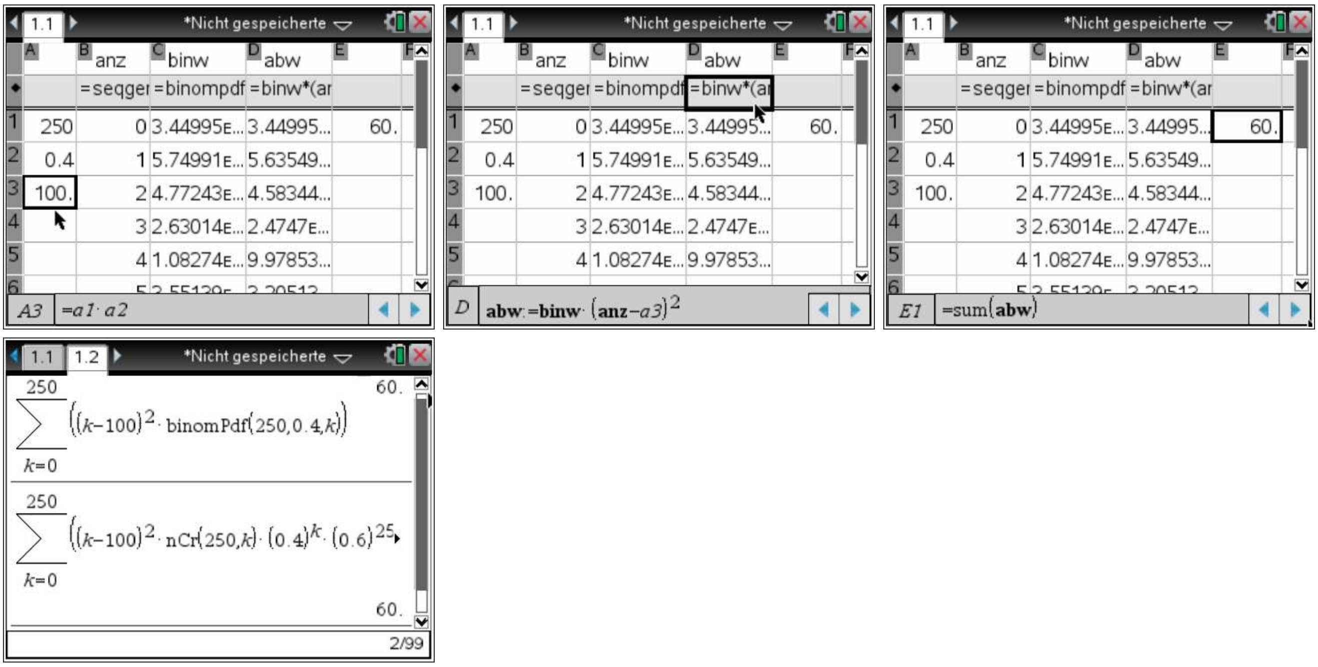


- Untersuchen Sie, wie oft man mindestens ein regelmäßiges Ikosaeder (das ist ein 20-flächiger regelmäßiger Körper) werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens einmal Augenzahl 1 auftritt?

Formel zur Berechnung der Varianz einer Binomialverteilung

Die Varianz V(X) einer Zufallsgröße X ist allgemein definiert als die mittlere quadratische Abweichung der Werte der Zufallsgröße vom Erwartungswert μ, bei Binomialverteilungen also durch $V(X) = \sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \cdot binompdf(n,p,k) = \sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

	Die Varianz der Binomialverteilung mit *n* = 250 (vgl. *Zelle A1*) und *p* = 0,4 (vgl. *Zelle A2*) berechnet sich als Summe von Produkten, die aus benachbarten Zellen der Spalten B und C berechnet werden. In Spalte D werden die Produkte gebildet, die Summe der Elemente von Spalte D ist in Zelle E1 angegeben. Die Varianz berechnet hier als V(X) = 60.
	Hinweis: Die Varianz einer Binomialverteilung kann auch direkt mit dem *Calculator* berechnet werden.



- Berechnen Sie für verschiedene Werte von *n* und *p* jeweils die Varianz gemäß Definition und stellen Sie eine Berechnungsformel für V(X) auf.
  Überprüfen Sie die Formel durch Wahl von beliebigen Werten von n und p.

n = 200 und p = 0,5	n = 300 und p = 0,5
n = 200 und p = 0,4	n = 200 und p = 0,6
n = 300 und p = 0,1	n = 300 und p = 0,9

Beachten Sie: Zur Berechnung müssen nur die Zellen A1 und A2 geändert werden.

Radius von 90 %-Umgebungen

Die Wahrscheinlichkeiten von symmetrischen Umgebungen können mithilfe kumulierter Wahrscheinlichkeiten berechnet werden: Erhöht man systematisch den Radius der Umgebung um den Erwartungswert, dann überschreiten die Wahrscheinlichkeiten für die größer werdenden Umgebungen irgendwann vorgegebene Wahrscheinlichkeiten.

Beispielsweise gilt für n = 200 und p = 0.25, also $\mu = 50$:

$P(X = 50) = P(49{,}5 \le X \le 50{,}5) \approx 0{,}065$;

$P(49 \le X \le 51) = P(48{,}5 \le X \le 51{,}5) \approx 0{,}193$; …

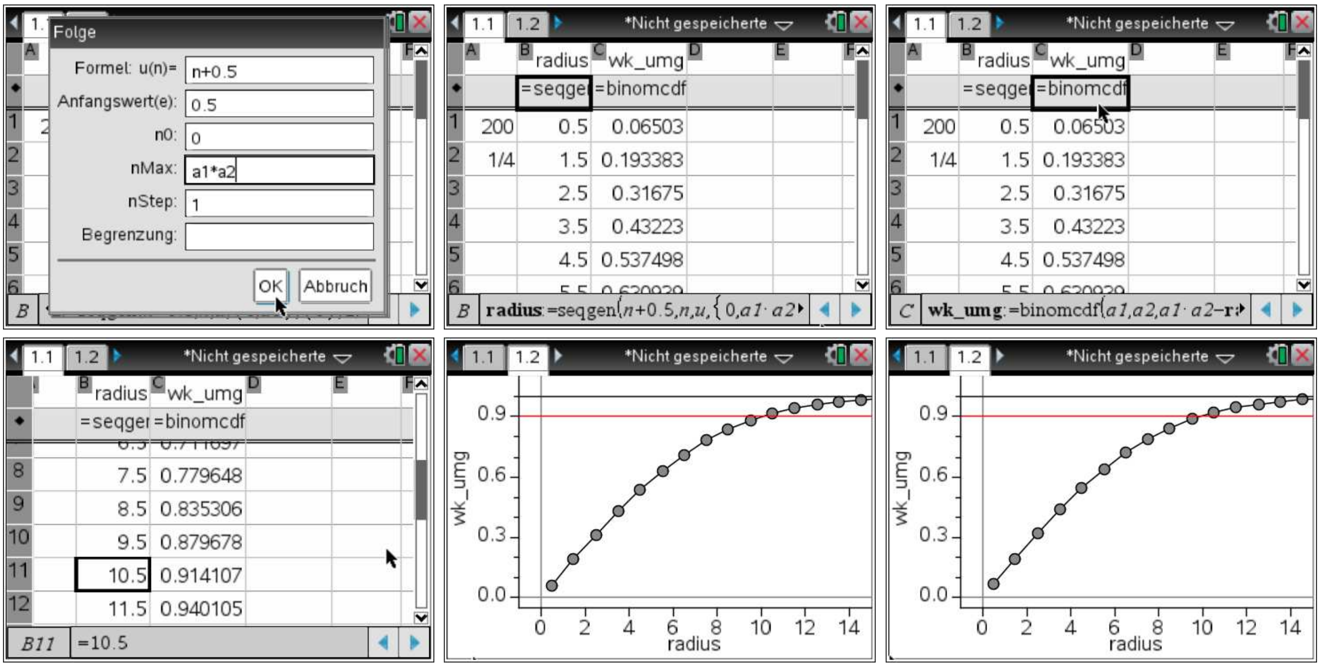
$P(41 \le X \le 59) = P(40{,}5 \le X \le 59{,}5) \approx 0{,}880$;

$P(40 \le X \le 60) = P(39{,}5 \le X \le 60{,}5) \approx 0{,}914$

d. h. man muss eine Umgebung mit Radius 10,5 betrachten, um mindestens 90 % der Ergebnisse des BERNOULLI-Versuchs zu erfassen.

Die grafische Darstellung der Funktion, bei der dem Radius einer Umgebung die Wahrscheinlichkeit dieser Umgebung zugeordnet wird, ist ergänzt durch eine Parallele zur Radius-Achse zur Wahrscheinlichkeit 90 %. So kann man an der Grafik ablesen, welcher Radius erforderlich ist, um ca. 90 % der Ergebnisse eines BERNOULLI-Versuchs zu erfassen.

Die letzte Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen für n = 150 und p = 0.4.

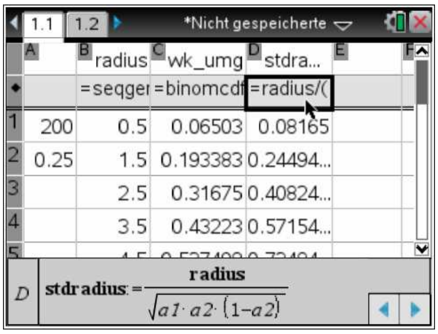


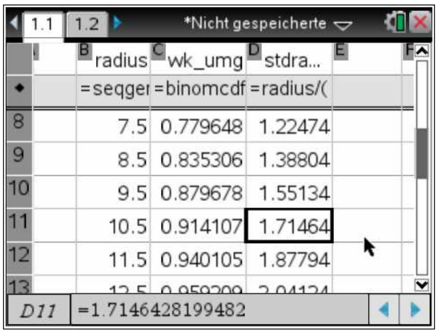
- Bestimmen Sie die Radien der 90 %-, 95 %-, 99 %-Umgebungen um den Erwartungswert für n = 300, p = 0,4 [n = 400, p = 0,5].

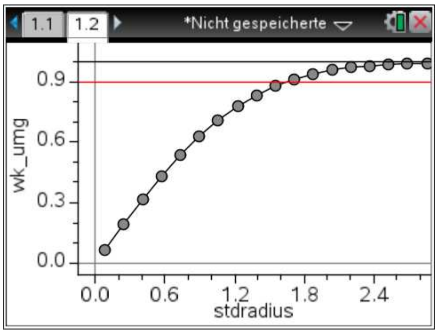
Entdecken der Sigma-Regeln

Die Streuung einer Verteilung um den Erwartungswert wird mithilfe der Standardabweichung σ gemessen. Daher werden im Folgenden die Radien der Umgebungen als Vielfache der Standardabweichung σ angegeben.

	Die Tabelle zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten wird um eine Spalte erweitert, in der die Werte Radius/σ, also die standardisierten Radien eingetragen werden. Beispielsweise wird für n = 200 und p = 0.25 ein Radius von mindestens 1,71σ benötigt, um auf eine Gesamt-Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % zu kommen.
	Entsprechend kann auch die grafische Darstellung des funktionalen Zusammenhangs zwischen standardisiertem Radius und der Wahrscheinlichkeit der zugehörigen Umgebung zum Ablesen des notwendigen Vielfachen von σ benutzt werden.







Der Radius zur 90 %-Umgebung von μ beträgt ungefähr r = 10,5. Misst man den Radius in Vielfachen von σ, dann ergibt sich also: $P(\mu - 1{,}71\sigma \le X \le \mu + 1{,}71\sigma) \approx 90\ \%$.

- Bestimmen Sie die Radien der 90 %-, 95 %-, 99 %-Umgebungen um den Erwartungswert – dargestellt als Vielfache der Standardabweichung σ – für zehn selbst gewählte Werte von n bzw. p.

selbst gewählte Werte von		notwendiger Radius für		
n	p	90 %-Umgebung	95 %-Umgebung	99 %-Umgebung

Sigma-Regeln und Boxplots

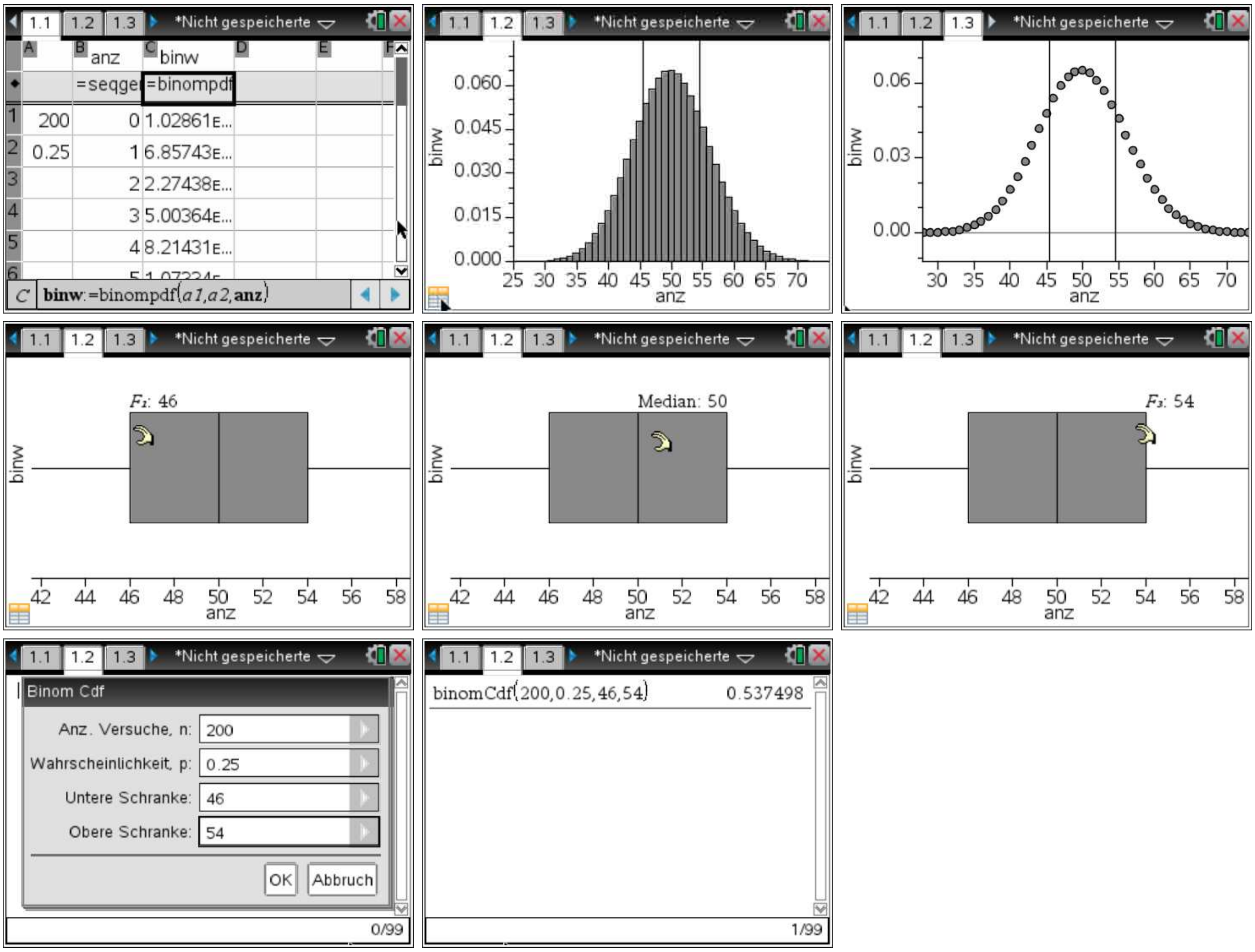
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Binomialverteilung kann man auch in Form eines Boxplots darstellen; dabei wird durch die Box (das Rechteck) etwa 50 % der Ergebnisse repräsentiert.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung kann in Tabellenform bestimmt werden.

Die Darstellung der Verteilung kann als Histogramm, Punktdiagramm oder Boxplot erfolgen. Nachdem das Boxplot gezeichnet wurde, wurden die Begrenzungen der Box (unterer und oberer Median) nachträglich auch in das Histogramm bzw. das Punktdiagramm eingetragen (Menü: *4: Analysieren / 8: Wert zeichnen*).

Die Wahrscheinlichkeit für das durch die Box repräsentierte Intervall beträgt nur ungefähr 50 %, hier: ca. 53,7 %, wie man im Calculator-Menü nachrechnen kann.

Der Radius der Umgebung beträgt r = 4.5, ausgedrückt als Vielfaches von σ: r ≈ 0.73σ.



• Bestimmen Sie die Länge der Box – gemessen in Vielfachen der Standardabweichung σ – für verschiedene Werte von n und p.
Zeigen Sie, dass ungefähr gilt: P(μ – 0.67σ ≤ X ≤ μ + 0.67σ) ≈ 50 %.

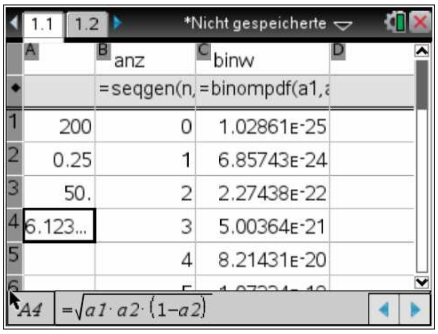
Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

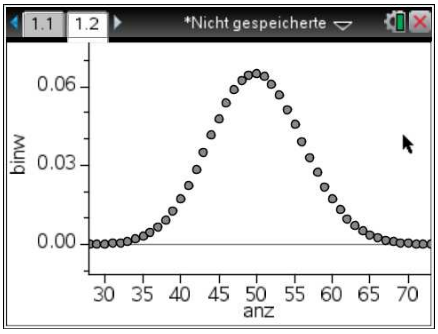
Binomialverteilungen, bei denen die LAPLACE-Bedingung ($\sigma > 3$) erfüllt ist, lassen sich durch eine geeignete Normalverteilung mit den Parametern $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ approximieren.

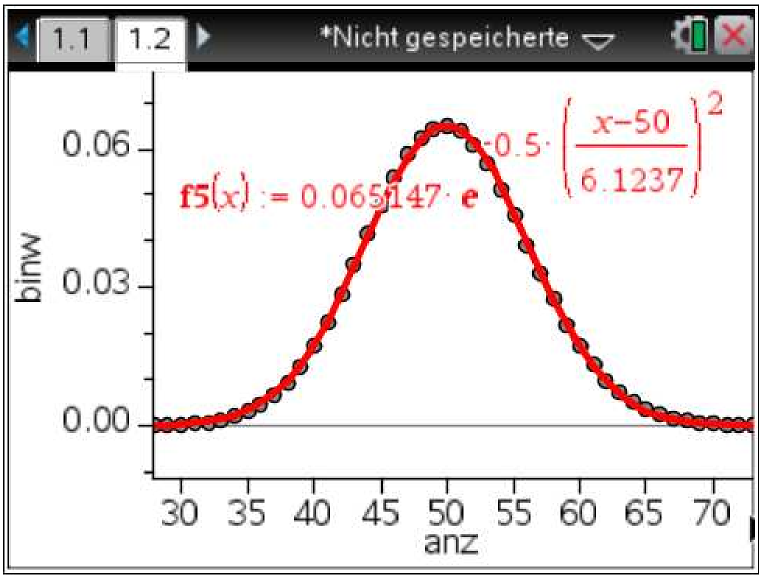
Für n = 200 und p = 0,25 ergibt sich $\mu = 50$ und $\sigma \approx 6.1237$.

Der Graph der stetigen Funktion $\varphi_{\mu,\sigma}$ mit $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ verläuft durch die zur Binomialverteilung gehörenden Punkte.

Es ist nicht möglich, im Funktionsterm der approximierenden Funktion auf die Inhalte von Zellen der Tabelle zurückzugreifen, d. h. die Zellenbezeichnungen zu verwenden (μ = a3, σ = a4).





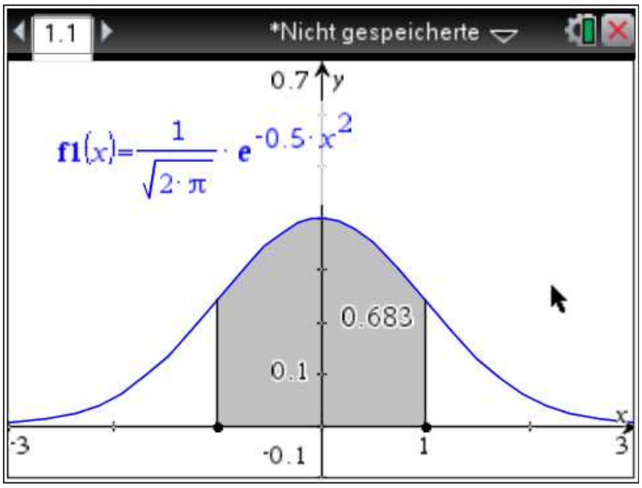


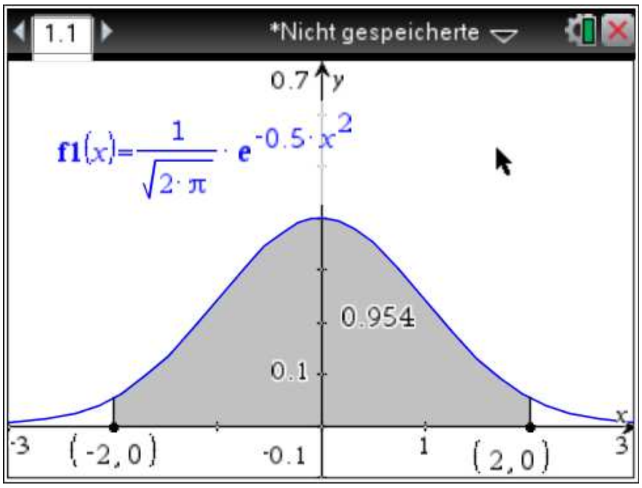
- Veranschaulichen Sie die Approximation der Binomialverteilung mit n = 300 und p = 0,4 [n = 250 und p = 0,1] durch eine geeignete Normalverteilung.

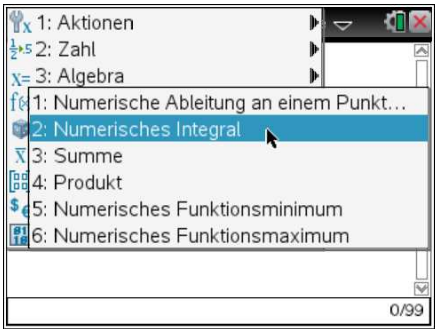
Flächenbestimmung bei der Dichtefunktion einer Normalverteilung

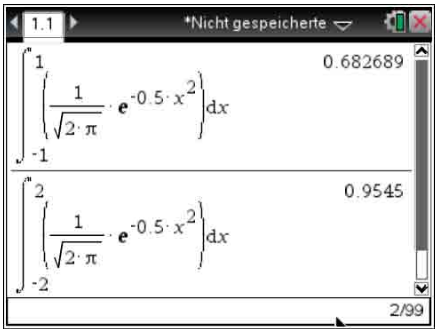
Die GAUSS'sche Dichtefunktion ist die Dichtefunktion einer Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Intervall-Wahrscheinlichkeiten erhält man bei einer normalverteilten Zufallsgröße durch Integration der Dichtefunktion über das betr. Intervall.

	Die einfachen Sigma-Regeln, also die Regeln für Umgebungen, deren Radius glatte Vielfache von σ sind, können Maßzahlen von Flächen mithilfe der numerischen Integration bestimmt werden.
	Im *Calculator*-Menü findet man die numerische Integration unter *4: Analysis / 2: Numerisches Integral*.









- Bestimmen Sie mithilfe der numerischen Integration der GAUSS'schen Dichtefunktion die Wahrscheinlichkeiten für folgende Umgebungen des Erwartungswerts:

$P(\mu - 0{,}5\sigma \le X \le \mu + 0{,}5\sigma) \approx$

$P(\mu - 1{,}5\sigma \le X \le \mu + 1{,}5\sigma) \approx$

$P(\mu - 2{,}5\sigma \le X \le \mu + 2{,}5\sigma) \approx$

$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx$

Anwenden der Formeln von MOIVRE-LAPLACE

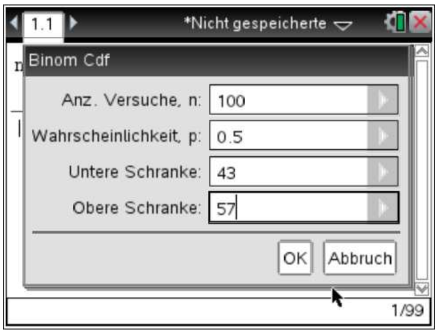
Sofern die LAPLACE-Bedingung σ > 3 (dies ist eine Faustregel) erfüllt ist, können Wahrscheinlichkeiten von binomialverteilten Zufallsgrößen näherungsweise berechnet werden:

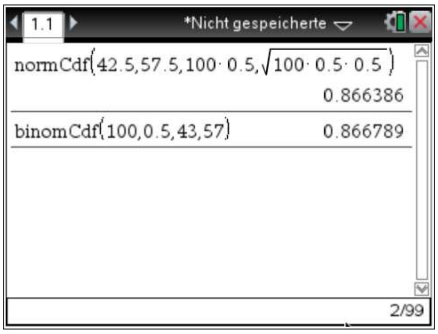
Bei der *Integralen Näherungsformel* wird die Wahrscheinlichkeit für Ergebnisse eines BERNOULLI-Versuchs, die in einem Intervall a ≤ X ≤ b liegen, mithilfe der Maßzahl der Fläche unter dem Graphen der zugehörigen normalverteilten Dichtefunktion bestimmt, also mithilfe der Integralfunktion Φ: $P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$

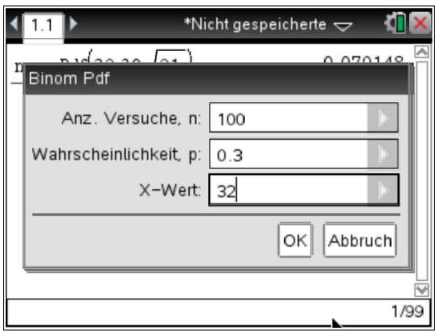
Bei der lokalen Näherungsformel wird die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Ergebnis eines BERNOULLI-Versuchs mithilfe des zugehörigen Funktionswerts der GAUSS'schen Dichtefunktion φ bestimmt: $P(X=k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$

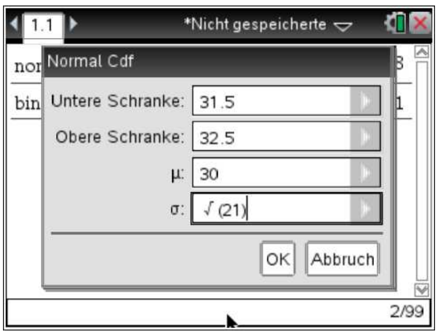
Im *Calculator*-Menü *5: Wahrscheinlichkeit* / *5: Verteilungen* / 2: *Normal Cdf* öffnet sich ein Fenster, in das die Parameter eingetragen werden können; dabei können statt der Werte auch die unausgerechneten Terme für μ und σ eingegeben werden. In den Abben. 1 – 3 ist für n = 100, p = 0.5 die Berechnung von P(43 ≤ X ≤ 57) angegeben, zum Vergleich auch die exakte Berechnung.

Analog erfolgt die Eingabe für die näherungsweise Berechnung der Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Ergebnis: P(X = 32) für n = 100 und p = 0.3; hier ist auch eine Berechnung mithilfe der integralen Näherungsformel möglich, vgl. Abb. 6.









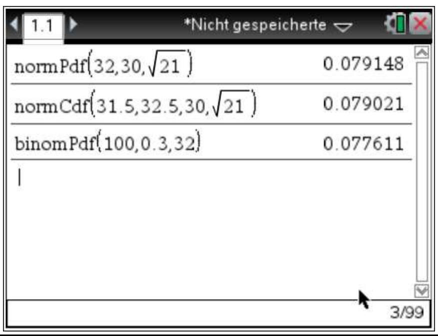
- Vergleichen Sie die exakt bzw. näherungsweise berechneten Wahrscheinlichkeiten für n = 200 und p = 0.4:

P(X = 75) =

P(76 ≤ X ≤ 88) =

P(X ≤ 83) =

P(X > 78) =



Bestimmen von 95 %-Umgebungen um den Erwartungswert

Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ (eine Faust-Regel für eine gute Approximation einer Binomialverteilung durch die Normalverteilung) erfüllt ist, dann kann man mithilfe der Sigma-Regeln Umgebungen um den Erwartungswert bestimmen, z. B. die 95 %-Umgebung von μ mithilfe der Regel: $P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$.

Muss man mehrere solcher 95 %-Umgebungen bestimmen, dann lohnt sich die Anlage eines Rechenblatts: Nacheinander werden im jeweils 1. Feld eingetragen: Wert für *n*; Wert für *p*; Formeln für μ, für σ, für *unten* := μ – 1.96σ und für *oben* := μ + 1.96σ sowie für binomcdf(*n*,*p*,*unten*, *oben*). Wenn man dann in Zelle a2 und b2 weitere Parameterwerte einträgt, muss man nur noch die Zellen über den zu berechnenden Größen markieren und nach unten ziehen (drag & drop).

Man kann das Rechenblatt auch dazu benutzen, um die Wahrscheinlichkeit für nach außen gerundete Umgebungsgrenzen zu bestimmen: Dazu kopiert man die betreffende Zeile und ersetzt die beiden Werte von *unten* und *oben* durch die nach außen gerundeten Werte, um auf diese Weise auf eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von über 95 % zu kommen.

Den folgenden Screenshot ist zu entnehmen:

n = 300, p = 0.3: P(74.4… ≤ X ≤ 105.5...) = P(75 ≤ X ≤ 105) = 0,9494… < 95 %

n = 250, p = 0.4: P(84.8... ≤ X ≤ 115.1...) = P(85 ≤ X ≤ 115) = 0,9548… > 95 %

n = 300, p = 0.3: P(74 ≤ X ≤ 106) = 0,9626… > 95 %

- Bestimmen Sie die 95 %-Umgebungen für

n = 360, p = 1/6: n = 400, p = 1/4:

n = 200, p = 0.5: n = 240, p = 2/3:

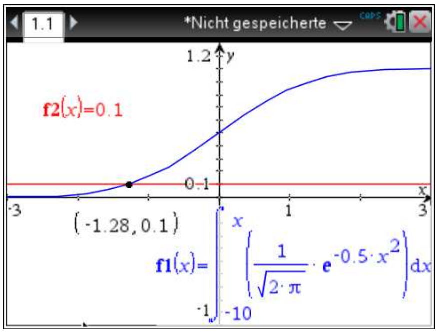
Mindestens k Erfolge bei einem n-stufigen BERNOULLI-Versuch

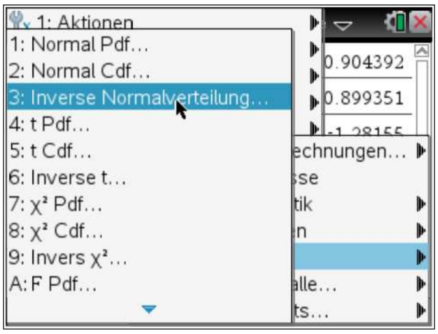
Nur etwa 60 % der angerufenen Personen einer telefonische Zufallsstichprobe sind bereit, Fragen zu einer Meinungsbefragung zu beantworten.
Wie viele Personen müssen mindestens angerufen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % tatsächlich mindestens 1000 Personen befragt werden können?

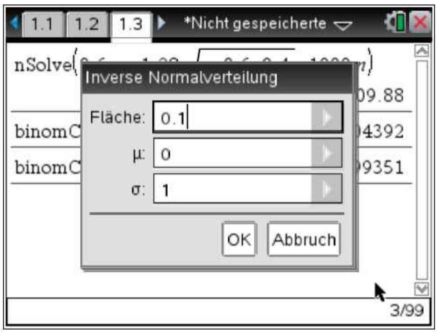
Mithilfe der Integralfunktion mit variabler oberer Grenze der GAUSS'schen Dichtefunktion lassen sich die gesuchten einseitigen σ-Umgebungen bestimmen.
Hier ist ein Bereich gesucht, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % das Ergebnis des Zufallsversuchs liegt. Ein solcher Bereich ist das Intervall mit unterer Grenze $\mu - 1.28\sigma$, d. h. es gilt: $P(X \geq \mu - 1.28\sigma) \approx 90$ %, vgl. Abb. 1.

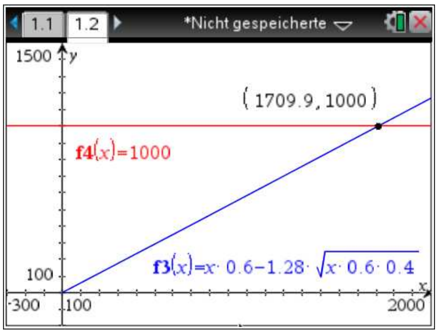
Zur Lösung der Aufgabe muss für p = 0.6 untersucht werden, für welches n gilt:
$\mu - 1.28\sigma = 1000$, d. h. $n \cdot 0.6 - 1.28 \cdot \sqrt{n \cdot 0.6 \cdot 0.4} = 1000$.
Dies kann mit grafischen Methoden geschehen, indem man den Schnittpunkt des Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot 0.6 - 1.28 \cdot \sqrt{x \cdot 0.6 \cdot 0.4}$ mit dem Graphen von $g(x) = 1000$ bestimmt, vgl. Abb. 5.

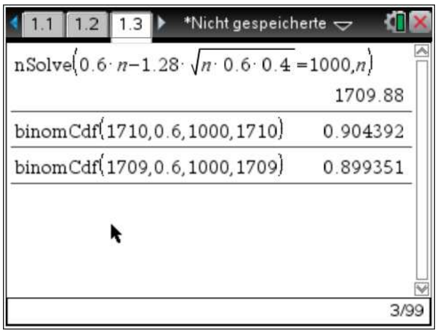
Alternativ kann auch die inverse Normalverteilung zur Bestimmung des benötigten Vielfachen von σ verwendet werden (Menü *6: Statistik / 5: Verteilungen / 3: Inverse Normalverteilung*), vgl. Abben. 2 - 4.
Die Gleichung $\mu - 1.28\sigma = 1000$ kann auch mithilfe des numerischen Gleichungslösers des GTR bestimmt werden, vgl. Abb. 6.
Zur Kontrolle kann dann durch exakte Berechnung der Wahrscheinlichkeit überprüft werden, ob der mithilfe der Sigma-Regel bestimmte Mindestwert von n auch tatsächlich die Bedingung erfüllt.









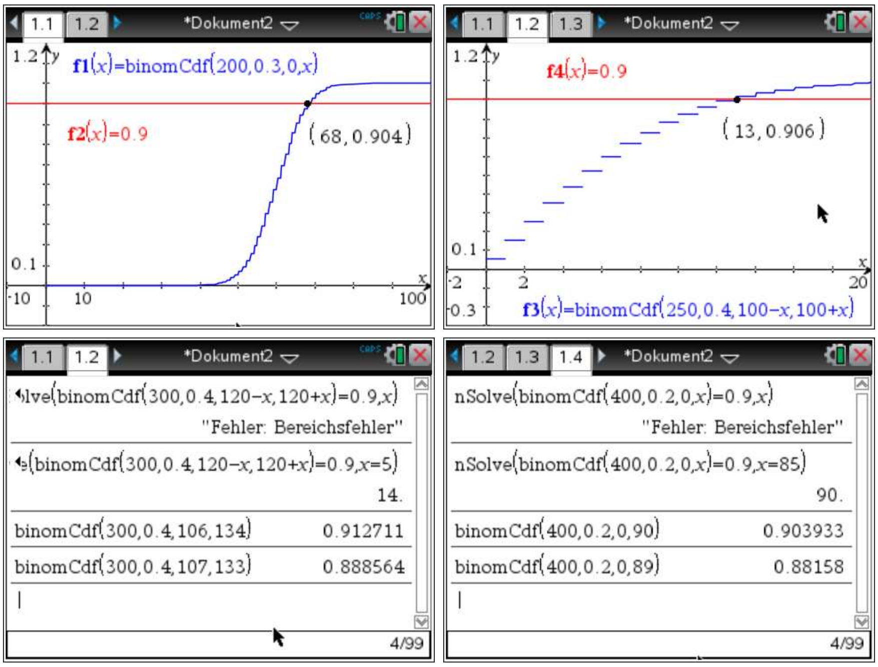


- Erfahrungsgemäß werden nur 80 % der gebuchten Übernachtungen eines Hotels auch tatsächlich wahrgenommen. Wie viele Buchungen sollte das Hotel höchstens annehmen, wenn in maximal 5 % der Fälle eine Überbuchung eintreten darf?

Bestimmen von Umgebungen des Erwartungswerts ohne Sigma-Regeln

Mithilfe des numerischen Gleichungslösers oder einer grafischen Methode lassen sich verschiedene Problemstellungen bearbeiten.

	Man kann als Funktionsterm einer Funktion auch die Funktion der kumulierten Binomialverteilung eingeben und mithilfe der Schnittpunkt-Bestimmung (*6: Graph analysieren / 4: Schnittpunkt*) kritische Werte zu vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten bestimmen. Abb. 1 zeigt für den 200-fachen BERNOULLI-Versuch mit p = 0.3 die Bestimmung einer einseitigen 90 %-Umgebung, d. h. es gilt: P(X > 68) ≤ 10 %. Abb. 2 zeigt für den 250-fachen BERNOULLI-Versuch mit p = 0.4 die Bestimmung des Radius r = 13 einer zweiseitigen Umgebung um den Erwartungswert μ = 250 · 0.4 = 100, in der mindestens 90 % der Ergebnisse liegen, d. h. es gilt: P(87 ≤ X ≤ 113) ≥ 90 %.
	Abb. 3 zeigt die numerische Lösung der Gleichung P(μ – *x* ≤ X ≤ μ + *x*) = 0.9 mithilfe des Befehls: *nSolve(binomCdf(300,0.4,120-x,120+x)=0.9,x=5).* Man beachte, dass eine Fehlermeldung erscheint, wenn man keinen Startwert für den Suchalgorithmus eingibt (hier willkürlich: *x* = 5). Die Lösung *x* = 14 bedeutet: P(106 ≤ X ≤ 134) ≥ 90 %. Analog zeigt Abb. 4 die numerische Lösung der Gleichung P(X ≤ *x*) = 0.9 mithilfe des Befehls: *nSolve(binomCdf(400,0.2,0,x)=0.9,x=85).* Auch hier erscheint eine Fehlermeldung, wenn man keinen Startwert für den Suchalgorithmus eingibt (hier willkürlich: *x* = 85). Die Lösung *x* = 90 bedeutet: P(X ≤ 90) ≥ 90 %.

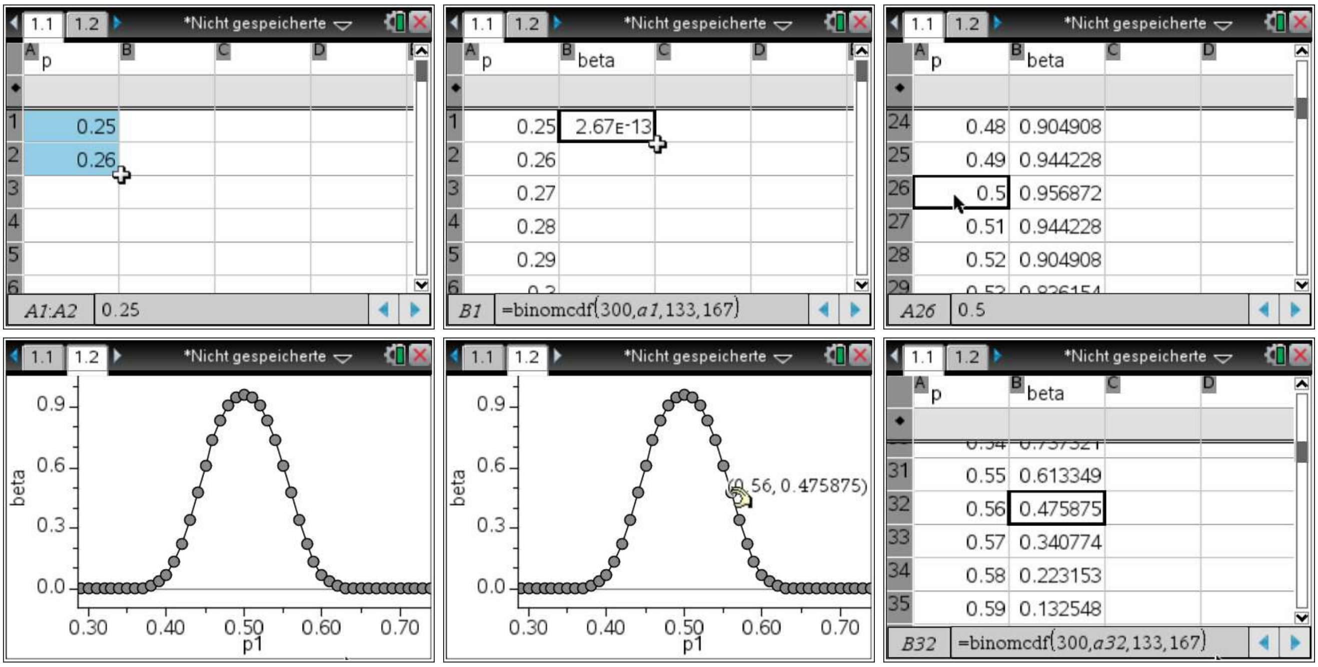


- Bestimmen Sie eine ein- bzw. zweiseitige 90 %-Umgebung von μ für die Binomialverteilung mit n = 360 und p = 1/6 mithilfe der grafischen bzw. numerischen Methode.

Bestimmen der Operationscharakteristik eines zweiseitigen Tests

Für die zweiseitige Hypothese p = 0,5 einer binomialverteilten Zufallsgröße ergibt sich auf dem 95 %-Niveau für n = 300 ein Annahmebereich von A = {133, 134, …, 167}. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis eines Zufallsversuchs im Annahmebereich A liegt, obwohl dem Zufallsversuch die Erfolgswahrscheinlichkeit p_1 zugrunde liegt.

	Das Tabellenblatt wird wie bei einer Tabellenkalkulation erzeugt: Man gibt in Zelle A1 einen Startwert für das unbekannte, dem Zufallsversuch zugrunde liegende p1 an, in Zelle A2 einen nächsten Wert. Man markiert beide Zellen und geht mit dem Zeiger in die untere rechte Ecke der zweiten Zelle. Dann zeigt sich ein „dickes“ Kreuz, was darauf hinweist, dass das Rechenblatt bereit ist, eine arithmetische Folge anzulegen; man erhält diese Folge durch Herunterziehen. In Zelle B1 trägt man dann den gewünschten Befehl zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Intervall (den Annahmebereich) an, wobei die zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit p1 in Zelle A1 steht. Durch drag&drop wird dieser Befehl auf die gewünschten Zellen von Spalte B übertragen.
	Die Operationscharakteristik zeigt den funktionalen Zusammenhang zwischen p_1 und $P_{p = p1}(A)$. Aus dem Graphen oder der Wertetabelle können einzelne Werte für β konkret abgelesen werden.



- Bestimmen Sie den Annahmebereich für die Hypothese p = 0,3 für eine Stichprobe vom Umfang n = 400 auf dem 5 %-Niveau.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, falls dem Zufallsversuch tatsächlich p_1 = 0,35 zugrunde liegt.
- Bestimmen Sie die zugehörige Operationscharakteristik.

Bestimmen einer Entscheidungsregel beim einseitigen Hypothesentest

Bei einem Würfel wird vermutet, dass Augenzahl 6 häufiger auftritt als es der Wahrscheinlichkeit $p = {}^{1}/_{6}$ entspricht, d. h. vermutet wird $p > 1/6$. Um dies statistisch zu „beweisen“, muss man vom logischen Gegenteil der Vermutung ausgehen und die Hypothese $p \le 1/6$ testen (die zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit ist höchstens gleich ${}^{1}/_{6}$).
Dazu soll der Würfel 240-mal geworfen werden. Wenn Augenzahl 6 dann extrem häufig auftritt, kann die getestete Hypothese $p \le 1/6$ verworfen werden. Extrem häufig bedeutet, dass die Anzahl der Sechsen in einem Bereich oberhalb des Erwartungswerts liegt (am oberen Ende der Verteilung), dem insgesamt höchstens eine Wahrscheinlichkeit α zukommt.

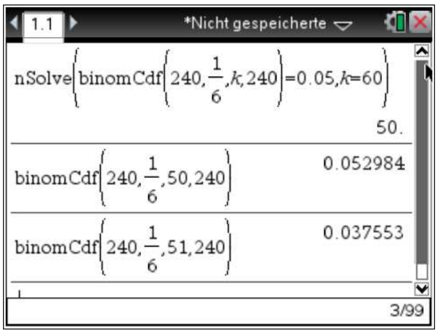
Zu einem vorgegebenen maximalen Fehler 1. Art von $\alpha \le 0{,}05$ ist der kritische Wert K gesucht, für den gilt: $P(X > K) \le 0{,}05$ für alle $p \le {}^{1}/_{6}$. Dazu wird für verschiedene Werte von p, die höchstens gleich ${}^{1}/_{6}$ sind, ein geeigneter Wert von K gesucht.

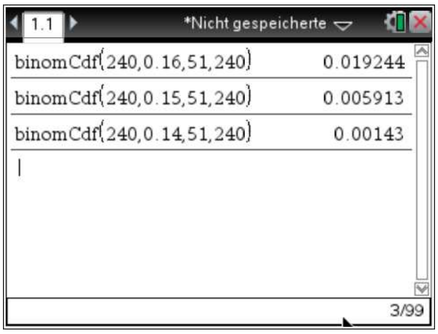
Mithilfe des numerischen Gleichungslösers (der Lösungsalgorithmus wird willkürlich bei $K = 240 \cdot {}^{1}/_{6} = 60$ gestartet) findet man (nach Überprüfung) heraus, dass für $p = 1/6$ die Bedingung $P(51 \le X \le 240) = P(X > 50) \le 0{,}05$ erfüllt ist.

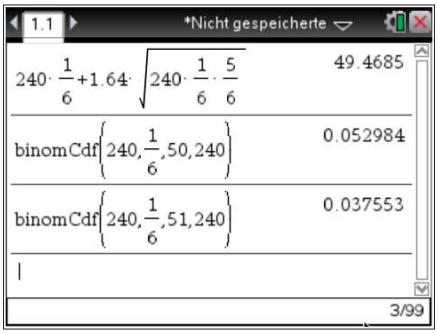
Für kleinere Werte von p, z. B. für $p = 0.16$, $p = 0.15$, $p = 0.14$ ist die Bedingung erst recht erfüllt, wie man in Abb. 2 ablesen kann.

Deshalb gilt die Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p \le {}^{1}/_{6}$, falls beim 240-fachen Würfeln mehr als 50-mal Augenzahl 6 fällt.

Alternativ kann der kritische Wert auch mithilfe der (einseitigen) Sigma-Regeln bestimmt werden; hier also mithilfe von $P(X > \mu + 1.64\sigma) \approx 0{,}05$, vgl. Abb. 3.







- Bestimmen Sie eine Entscheidungregel zur einseitigen Hypothese

(1) $p < 0.5$, $n = 160$, $\alpha \le 0.05$

(2) $p \ge 0.2$, $n = 300$, $\alpha \le 0.10$

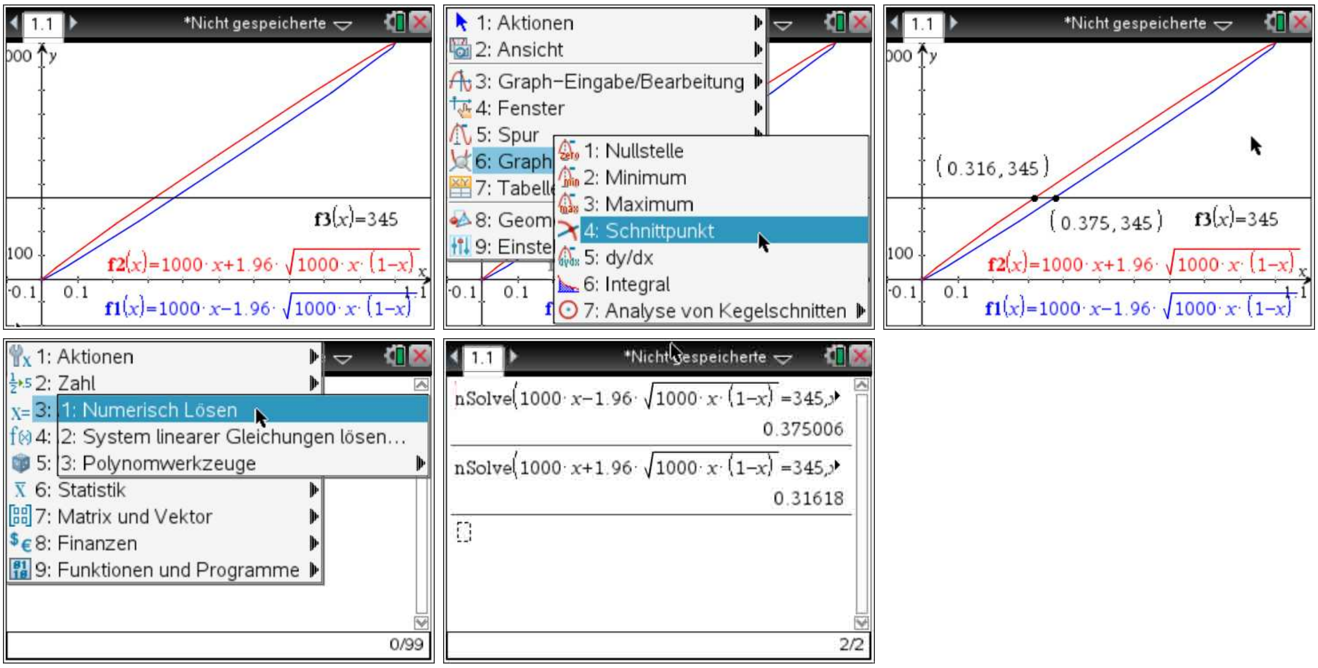
(3) $p > 0.75$, $n = 500$, $\alpha \le 0.05$

(4) $p \le 1/4$, $n = 400$, $\alpha \le 0.10$

Bestimmen eines 95 %-Konfidenzintervalls

345 von 1000 befragten Personen vertreten eine bestimmte Meinung. Bestimmt werden sollen alle Anteile p, in deren zugehöriger 1,96σ-Umgebung von μ das Stichprobenergebnis liegt. Der Ansatz *Das Stichprobenergebnis unterscheidet sich um höchstens 1,96σ von μ*, welcher der Rechnung zugrunde gelegt wird, ist also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % richtig.

	Gesucht sind alle Erfolgswahrscheinlichkeiten p für die gilt: $1000p-1{,}96\cdot\sqrt{1000\cdot p\cdot(1-p)}\leq 345\leq 1000p+1{,}96\cdot\sqrt{1000\cdot p\cdot(1-p)}$. Im Extremfall gilt also: $1000p-1{,}96\cdot\sqrt{1000\cdot p\cdot(1-p)}=345$ bzw. $1000p+1{,}96\cdot\sqrt{1000\cdot p\cdot(1-p)}=345$ Diese Gleichungen können grafisch mithilfe der zugehörigen Funktionen um dem *Schnittpunkt*-Befehl bestimmt werden. Das 95 %-Konfidenzintervall ist 0,317 ≤ p ≤ 0,375 (zur sicheren Seite runden, also nach innen). Für p = 0,317 liegt das Stichprobenergebnis X = 345 am oberen Ende der 1,96σ-Umgebung von μ, für p = 0,375 am unteren Ende.
	Mithilfe des numerischen Gleichungslösers (Menü *1:Algebra / 1: Numerisch Lösen*) können die Lösungen der beiden Gleichungen ebenfalls bestimmt werden.

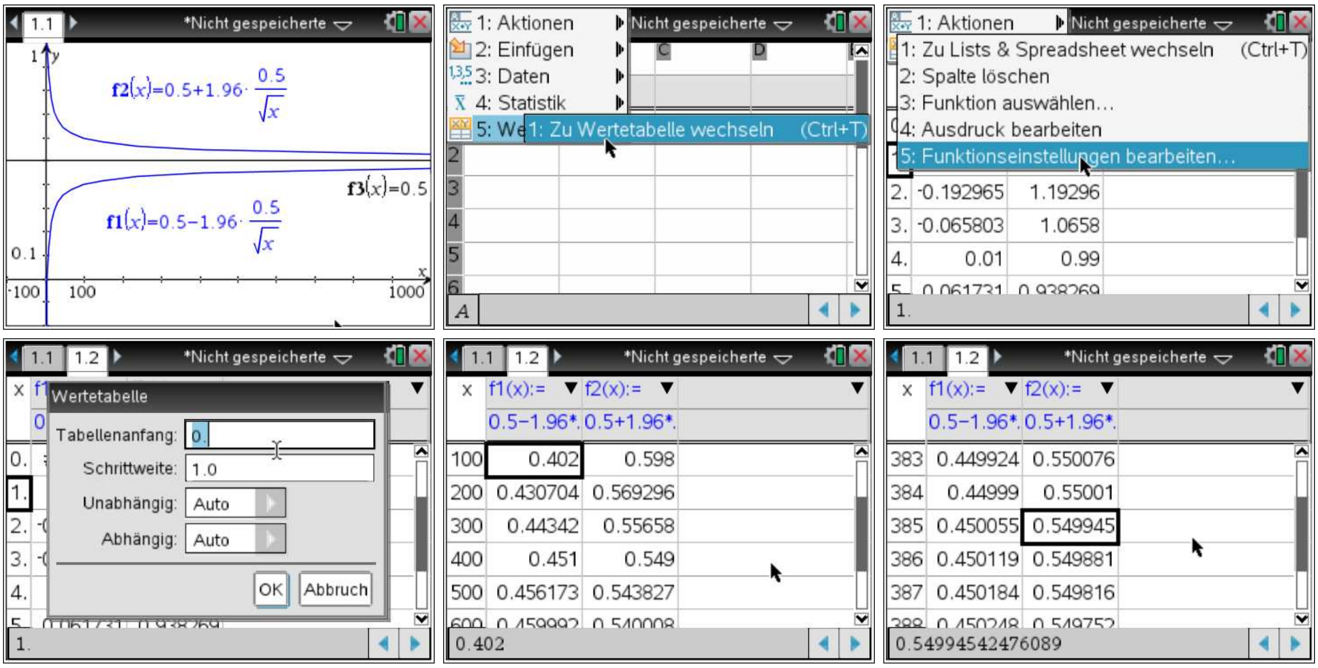


- Bestimmen Sie ein 90 %-Konfidenzintervall für eine Stichprobe vom Umfang n = 500 und das Stichprobenergebnis X = 400.

Mindestumfang einer Stichprobe – der 95 %-Trichter

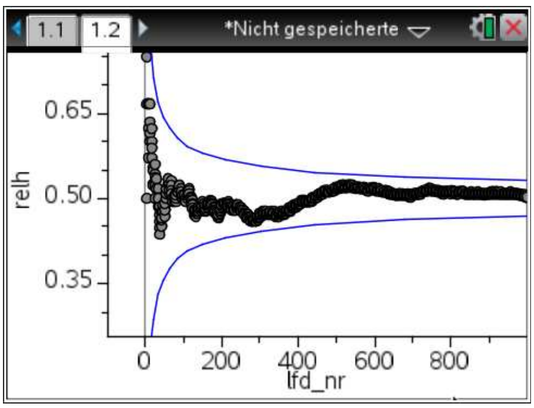
Führt man einen Münzwurf (also p = 0.5) n-fach durch, dann liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % der Anteil X/n der Wappen im Intervall [0.5 – 1.96σ/n ; 0.5 + 1.96σ/n].

	An der Wertetabelle der zugehörigen Funktionen, die den sogenannten 95 %-Trichter für die relativen Häufigkeiten bilden, kann man ablesen, wie breit dieses Intervall ist, z. B. ergibt sich für n = 200 das Intervall [0.4307 ; 0. 5693], d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % unterscheidet sich die relative Häufigkeit X/n für Wappen von der Wahrscheinlichkeit p = 0.5 für Wappen um ca. 6,9 %.
	Wird umgekehrt der Mindestumfang einer Stichprobe gesucht, damit eine zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit auf … Prozentpunkte genau geschätzt werden kann, dann findet man diesen Wert durch entsprechende Verfeinerung der Wertetabelle, z. B. genügt ein Stichprobenumfang von n = 385, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % die zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit auf 5 Prozentpunkte genau zu schätzen.



- Bestimmen Sie den Mindestumfang einer Stichprobe für eine Schätzung von p auf 1 Prozentpunkt genau, wenn man weiß, dass p ≈ 0.3 (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %).

- Führen Sie die Simulation eines 1000-fachen Münzwurfs durch, und stellen Sie die Entwicklung der relativen Häufigkeiten der Anzahl der Wappen dar. Ergänzen Sie die Grafik durch Eintragung des 95 %-Trichters.



Durchführung eines Alternativtests

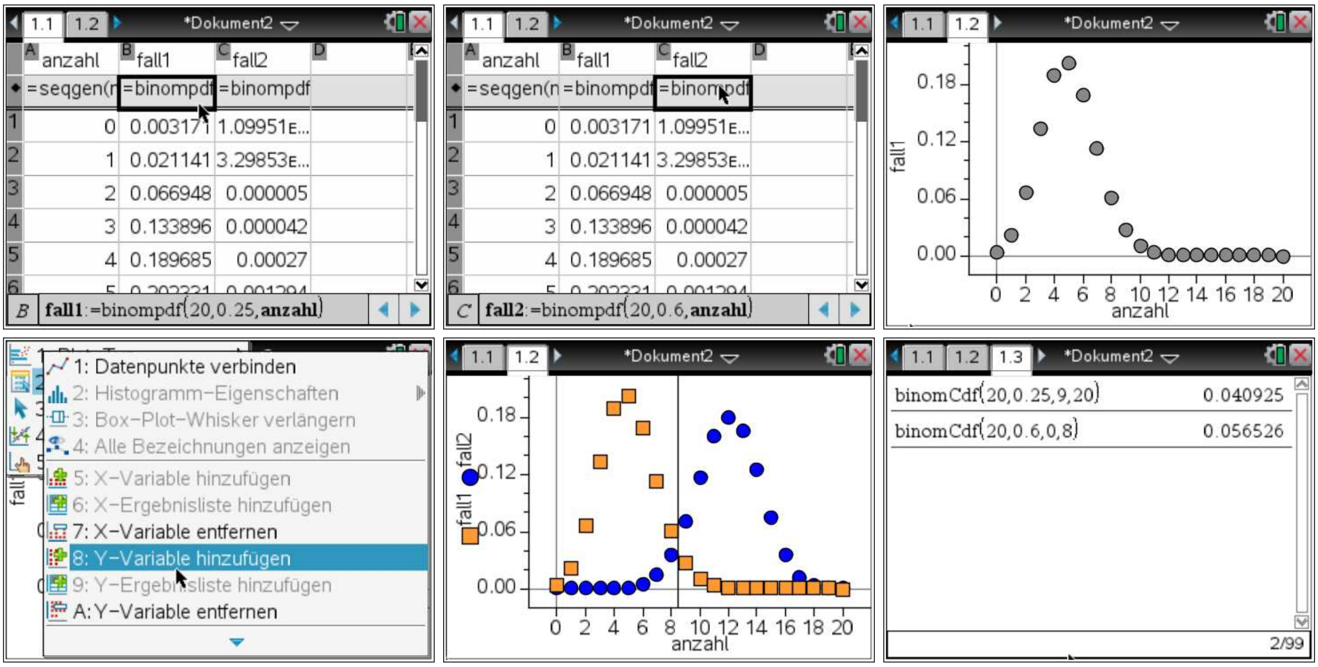
In einem Spielautomat dreht sich ein Glücksrad mit 40 gleich großen Sektoren, von denen entweder 10 (also 25 %) oder 24 (also 60 %) der Felder rot und die übrigen grün gefärbt sind. Man gewinnt, wenn das Glücksrad auf einem rot gefärbten Sektor stehen bleibt.

Welcher der beiden Fälle vorliegt, soll durch 20-fache Durchführung des Spiels überprüft werden. Dazu werden die beiden in Frage kommenden Binomialverteilungen bestimmt, also für $p_1 = 0.25$ und für $p_2 = 0.6$.

Die Erwartungswerte sind $\mu_1 = 20 \cdot 0.25 = 5$ und $\mu_2 = 20 \cdot 0.6 = 12$. Daher erscheint es vernünftig, die Entscheidungsregel so anzulegen, dass der kritische Wert in der Mitte zwischen den beiden Erwartungswerten liegt, also K = 8.5.

Die zu den Verteilungen gehörenden Punktdiagramme können in einem gemeinsamen Koordinatensystem dargestellt werden. Dazu muss im Menü-Punkt *2: Plot-Eigenschaften* / *8: Y-Variable hinzufügen* auch die Variable *Fall2* berücksichtigt werden; dann werden die Punkte des Punktdiagramms automatisch in zwei Farben gefärbt. Die Grafik wurde noch durch den kritischen Wert K = 8.5 ergänzt (*4: Analysieren* / *8: Wert zeichnen*).

Mithilfe der Funktionen des *Calculator*-Menüs können die Wahrscheinlichkeiten für Fehler 1. und 2. Art berechnet werden.



- Formulieren Sie eine Entscheidungsregel zum kritischen Wert K = 8.5.
- Geben Sie für die Hypothese H_1: $p_1 = 0.25$ [H_2: $p_2 = 0.6$] die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. bzw. 2. Art an.
- Das Glücksrad wird 30-mal gedreht. Bestimmen Sie den kritischen Wert für die Hypothese H_1: $p_1 = 0.25$, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens 5 % betragen soll, sowie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

Bestimmen der Parameter μ und σ bei einer normalverteilten Zufallsgröße

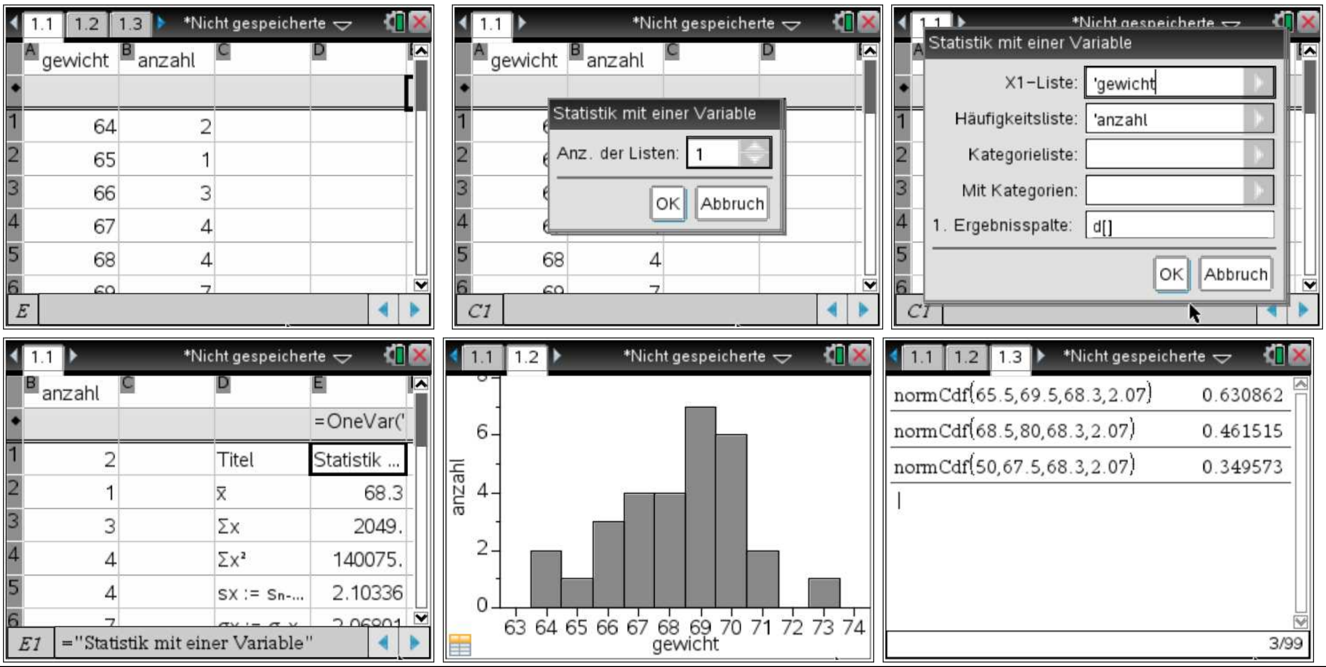
Zur Kontrolle werden 30 Hühnereier, deren Gewicht als normalverteilt angenommen wird, aus Packungen gewogen und in einer Häufigkeitsverteilung in Klassen erfasst (dabei bedeutet z. B. Gewicht x = 70 g: 69.5 ≤ x < 70.5 g).

Gewicht in g	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
Anzahl	2	1	3	4	4	7	6	2	0	1


Die Daten werden in ein Tabellenblatt eingegeben, dann können über das Menü *4: Statistik / 1: Statistische Berechnung / 1: Statistik mit einer Variablen* die Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung bestimmt werden:
Mittelwert $\overline{x}$ = 68.3 und Stichprobenstreuung $s_x \approx 2.07$

Das Histogramm der Häufigkeitsverteilung (mit den vorgegebenen Klassen der Breite 1 g) erhält man über *3: Daten / 8: Ergebnisdiagramm*

Normalverteilung der Zufallsgröße X: *Gewicht des Eies* aus der zugrunde liegenden Gesamtheit vorausgesetzt, können dann Wahrscheinlichkeitsaussagen über Intervalle gemacht werden:
P(65.5 ≤ X < 69.5) ≈ 63,1 % ; P(X > 68.5) ≈ 46,2 %; P(X < 67.5) ≈ 35,0 %



- Bestimmen Sie Mittelwert und Stichprobenstreuung der (als normalverteilt angenommenen) Körpergröße für 6 Monate alte Kinder aus einer Stichprobe:

Größe in cm	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Anzahl	1	2	2	2	0	1	4	2	7	7	3	4	2	3	0	1

- Bestimmen Sie: P(63.5 ≤ X < 68.5), P(X > 63.5), P(X < 67.5)

Erzeugen von Zufallszahlen durch einen linearen Kongruenzgenerator

Zur Erzeugung von Zufallszahlen werden häufig lineare Kongruenzgeneratoren verwendet, das sind rekursiv definierte Folgen des Typs $x_{n+1} \equiv (a \cdot x_n + b) \bmod c$.

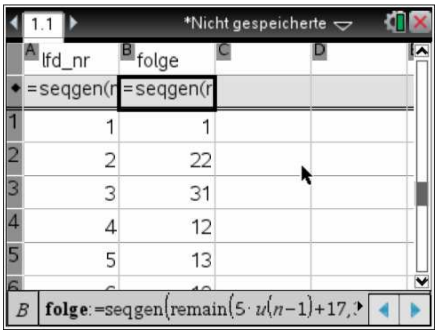
Die Koeffizienten a, b, c $\in \mathbb{N}$ werden so gewählt, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

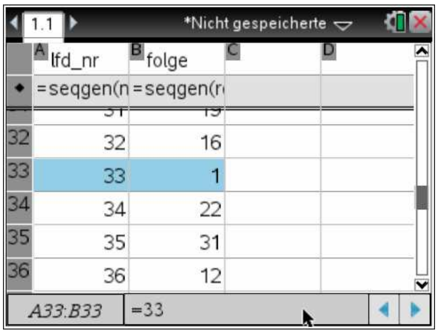
(1) Die Koeffizienten b und c sind teilerfremd.
(2) a-1 ist Vielfaches von jedem Primfaktor von c.
(3) Falls c Vielfaches von 4 ist, dann ist a-1 Vielfaches von 4.

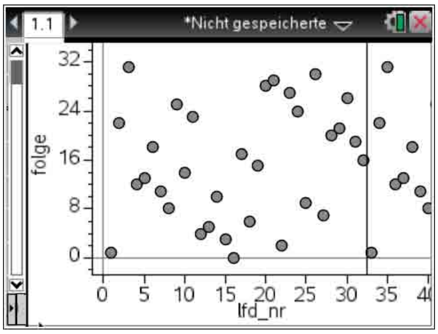
Man kann beweisen, dass dann eine Folge von natürlichen Zahlen erzeugt wird, in der alle natürlichen Zahlen 0,1, 2, ..., c-1 genau einmal auftreten, und erst nach c Iterationsschritten wiederholen sich die Glieder der Zahlenfolge. Dividiert man die so berechneten natürlichen Zahlen durch c, dann erhält man eine Dezimalzahl aus dem Intervall [0 ; 1 [, die als Pseudo-Zufallszahl verwendet werden kann. Die Brauchbarkeit einer Rekursionsvorschrift zur Erzeugung von Zufallszahlen kann durch verschiedene Testverfahren überprüft werden.

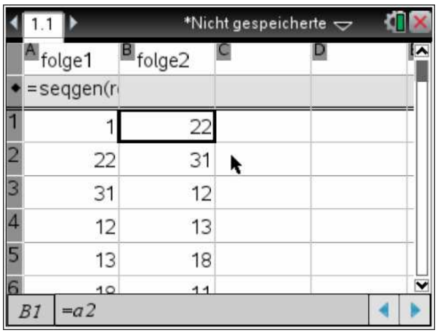
Beispielsweise wird durch die Rekursionsvorschrift $x_{n+1} \equiv (5 \cdot x_n + 17) \bmod 32$ eine Folge erzeugt, die aus den natürlichen Zahlen 0,1, 2, 3, …, 31 besteht. (*Hinweis*: Mithilfe des Befehls *remain(a,b)* wird der ganzzahlige Rest der Division von a durch b bestimmt.)

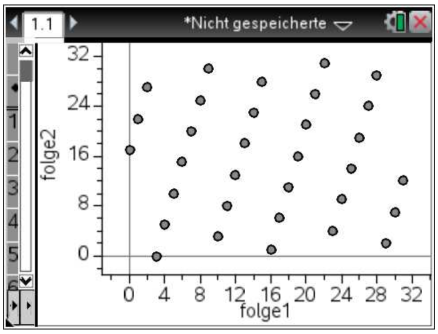
Da die Rekursionsvorschrift die lineare Zuordnung $x \to 5x + 17$ enthält (wobei die Werte maximal 31 werden dürfen, andernfalls werden sie um 32 vermindert), liegen die Punkte, deren Koordinaten aus benachbarten Folgegliedern bestehen, auf zueinander parallel liegenden Geraden, vgl. Abben. 4-5.











- Untersuchen Sie, ob durch die Rekursionsvorschrift $x_{n+1} \equiv (29 \cdot x_n + 5) \bmod 512$ eine Folge erzeugt wird, die aus den natürlichen Zahlen 0,1, 2, 3, …, 511 besteht.
  Wie können die Folgenglieder dieser Folge in Ergebnisse eines Würfelversuchs umgewandelt werden?

Poker-Test für Zufallszahlen

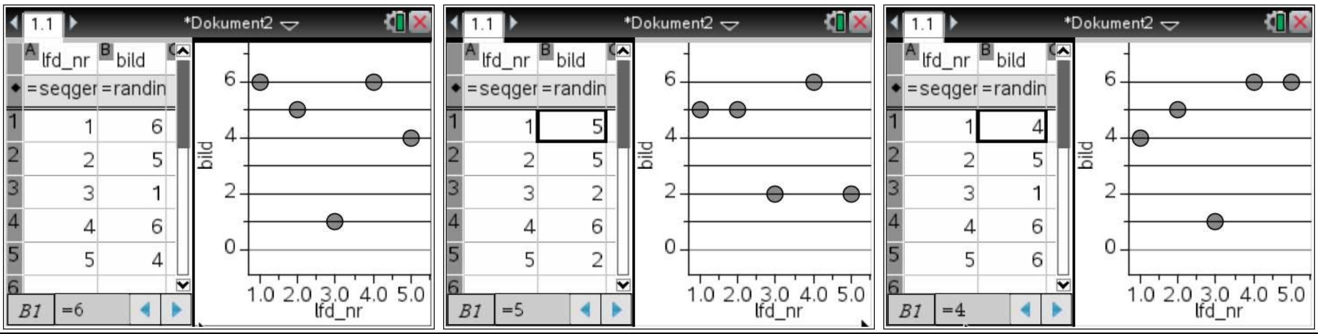
Beim Pokerspiel bewertet man die Zusammensetzung eines Blatts, das aus fünf Karten besteht.
Der Wert eines Blatts berücksichtigt die Wahrscheinlichkeit, mit denen die verschiedenen typischen Bilder auftreten.

Analog wird beim *Poker-Test* für Zufallszahlen das Ergebnis des 5-fachen Würfelns betrachtet. In der Tabelle rechts (entnommen aus *Elemente der Mathematik*) sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten angegeben.

Mögliche Bilder beim Pokern mit 5 Würfeln	Beispiel	Wahrscheinlichkeit	
Paar (one pair)		$\frac{\binom{5}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^5} = 46{,}30\,\%$	
2 Paare (two pairs)		$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{6}{2}\cdot 4}{6^5} = 23{,}15\,\%$	
Dreier (three of a kind)		$\frac{\binom{5}{3}\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{6^5} = 15{,}43\,\%$	
Full house		3,85 %	
Straight		3,09 %	
Four of a kind		1,93 %	15,12 %
Five of a kind		0,08 %	
ohne Besonderheit		6,17 %	

Die Abbildungen zeigen die Simulation des 5-fachen Würfelns sowie die Auswertung mithilfe des Schnellgraphs im Menü-Punkt *3: Daten*. An diesen Bildern kann man unmittelbar ablesen, ob eines der drei besonders häufig auftretenden Bilder (*one pair*, *two pairs*, *three of a kind*) aufgetreten ist.

Durch Anklicken des Befehlsfelds in Spalte B wird ein neues Bild erzeugt.



- Erläutern Sie, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Bilder berechnen.
- Welche besonderen Bilder sind in den o. a. Simulationen erzeugt worden?
- Erzeugen Sie mithilfe des GTR 100 solcher 5-Tupel und zählen Sie, wie oft die Bilder *one pair*, *two pairs*, *three of a kind* und *sonstige* auftreten. Beurteilen Sie die Zufälligkeit der erzeugten 5-Tupel mithilfe eines Binomialtests für die einzelnen Bilder.

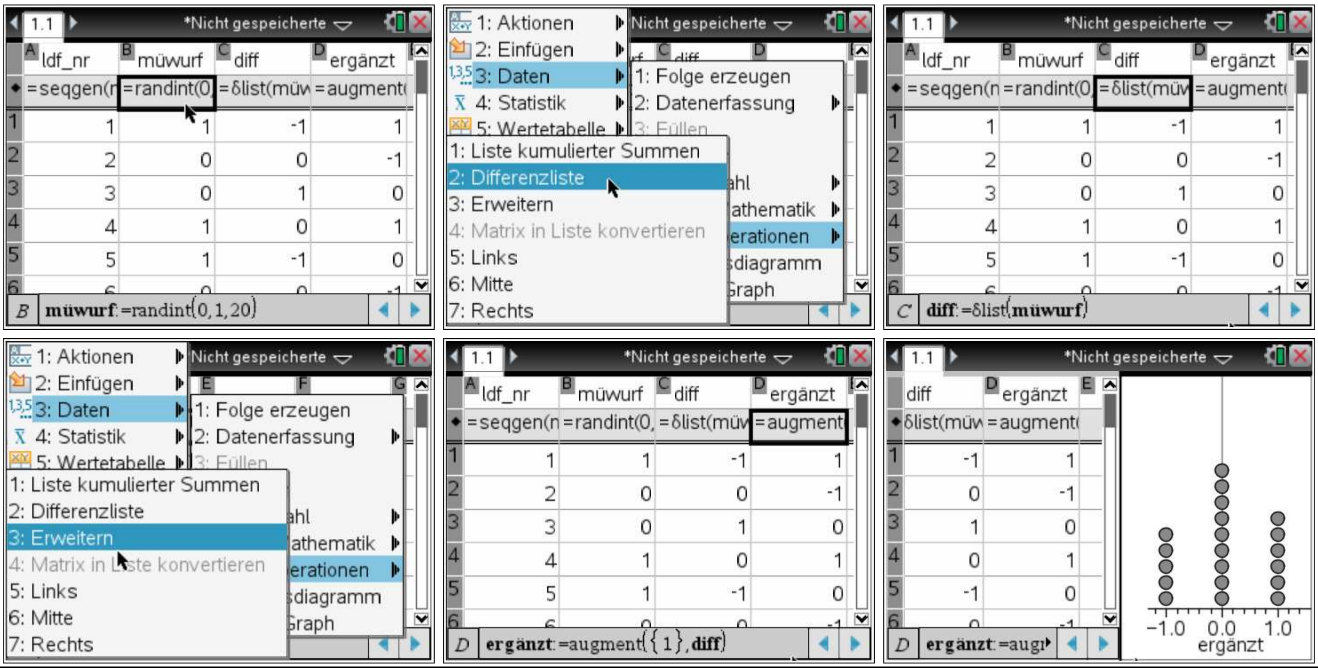
Anzahl der Runs beim Münzwurf

Beim Münzwurf können nur zwei Ergebnisse auftreten: W oder Z; dabei können die einzelnen Ergebnisse auch mehrfach aufeinander folgen. Interessant ist zu untersuchen, wie oft ein Wechsel zwischen W- und Z-Sequenzen erfolgt. Die **Anzahl der Runs** ergibt sich aus der Anzahl der Wechsel zwischen W- und Z-Sequenzen erhöht um 1 (für die erste auftretende Sequenz), beispielsweise enthält die folgende Sequenz eines 20-fachen Münzwurfs insgesamt 13 Runs: WW | Z | W | Z | W | ZZ | W | Z | WW | ZZZ | W | ZZ | WW.

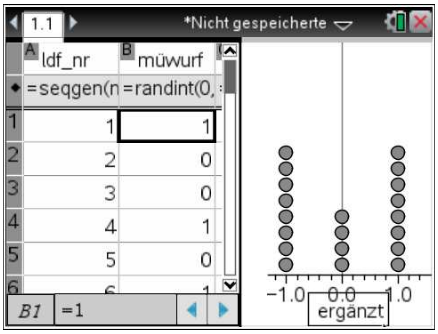
Man kann zeigen, dass die Zufallsgröße R: *Anzahl der Runs beim n-fachen Münzwurf* bis auf den Summanden 1 übereinstimmt mit der Verteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Wappen beim (n-1)-fachen Münzwurf,* d. h., dass gilt: $\mu_R = \frac{1}{2} \cdot (n-1) + 1$ und $\sigma_R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n-1}$.

Auf dem Rechenblatt ist in den Spalten A und B die Simulation eines 20-fachen Münzwurfs protokolliert. Bildet man die *Differenzliste* der Liste B, dann kann man an den Werten -1 bzw. 1 erkennen, ob ein Wechsel stattgefunden hat. Damit diese Liste grafisch dargestellt werden kann, muss sie dieselbe Länge haben wie die Ausgangsliste, daher wird die Liste am Anfang noch durch die 1-elementige Liste {1} *erweitert*. Aus dem Schnellgraphen kann abgelesen werden, dass bei dieser Simulation 5 + 6 = 11 Runs aufgetreten sind.

Betätigen des Befehlsfelds in Spalte B liefert eine weitere Simulation.



- Wie viele Runs sind in der rechts dargestellten Simulation aufgetreten?
- Wiederholen Sie die Simulation 50-mal und erstellen so eine Häufigkeitsverteilung für die Anzahl der Runs beim 20-fachen Münzwurf. Welche Ergebnisse kann man als *signifikant abweichend* von $\mu_R = 10{,}5$ bezeichnen?



Durchführung des Maximum- und des Permutationstests

Beim so genannten **Maximum-Test** zur Überprüfung der Qualität von Pseudozufallszahlen wird untersucht, an welcher Stelle das Maximum von t Zahlen liegt. Wenn die Werte „zufällig" sind, tritt das Maximum an jeder Stelle t mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

Beim so genannten **Permutationstest** wird untersucht, in welcher Weise die t Zahlen permutiert sind. Wenn die Werte „zufällig" sind, tritt jede der möglichen t! Permutationen mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

Fall t = 3: Das Maximum eines Tripels von Zufallszahlen kann vorne stehen, in der Mitte oder hinten – sofern der Fall gleicher Zufallszahlen ausgeschlossen werden kann.

In Abb. 1 wurde das Ziehen ohne Wiederholung von drei Zahlen aus der Menge {1, 2, 3, …, 100} simuliert.

Maximum-Test: Im Beispiel der Ziehung liegt das Maximum in den Spalte B, C und E an 3. Stelle, in Spalte D an 2. Stelle, in Spalte E an 1. Stelle.

Permutationstest: Es gibt insgesamt 3! = 6 Möglichkeiten, drei Zahlen a, b, c zu permutieren: (1) a-b-c, (2) a-c-b, (3) b-a-c, (4) b-c-a, (5) c-a-b, (6) c-b-a.
Im Beispiel der Ziehung liegen vor: Fall (1) in Spalte B und C, Fall (2) in Spalte D, Fall (3) in Spalte E und Fall (6) in Spalte F.

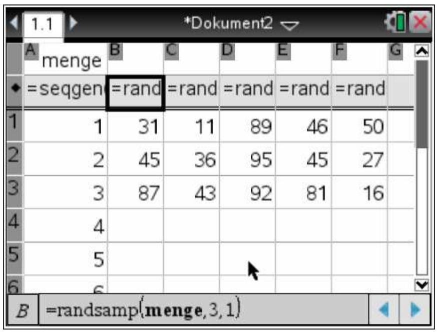
In Abb. 2 wurde drei Listen mit (je 100) Zufallszahlen aus dem Intervall [0 ; 1 [erzeugt und elementweise die drei möglichen Vergleiche durchgeführt:

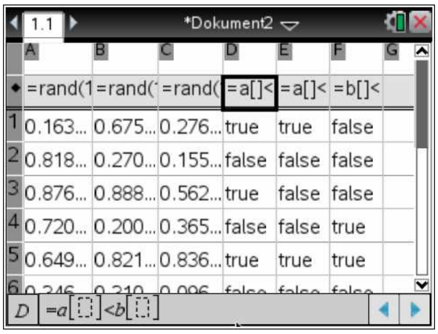
– Ist das Element aus Spalte A kleiner als das Element aus Spalte B?

– Ist das Element aus Spalte A kleiner als das Element aus Spalte C?

– Ist das Element aus Spalte B kleiner als das Element aus Spalte C?

Aus den Wahrheitswerten *true* bzw. *false* ergibt sich, welcher Fall vorliegt.





- Wie kann man aus der Kombination der Wahrheitswerte (2^3 = 8 mögliche Fälle) erschließen, an welcher Stelle das Maximum liegt bzw. welche der sechs möglichen Permutationen?
- Führen Sie die Experimente, wie sie durch Abb. 1 bzw. Abb. 2 beschrieben sind, durch und werten Sie 100 zufällig erzeugte Tripel mithilfe des Maximum- bzw. des Permutationstests aus. Wann wäre ein Ergebnis als *signifikant abweichend* anzusehen?

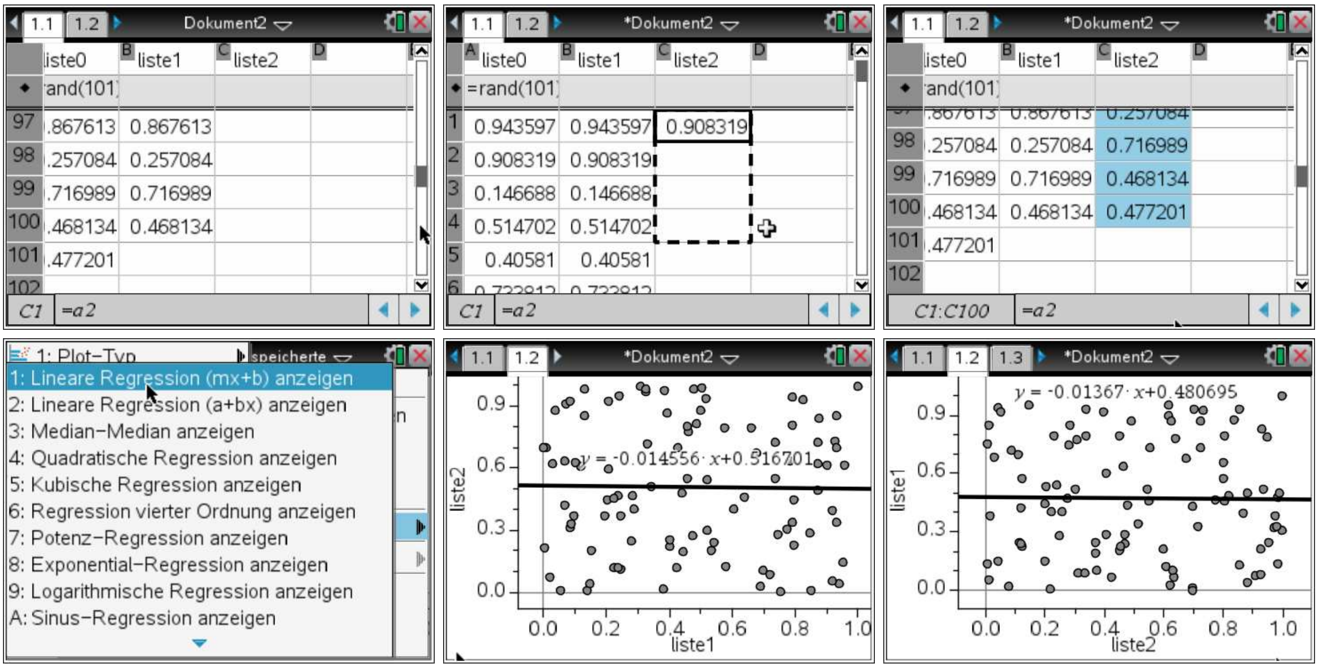
Untersuchung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Zufallszahlen

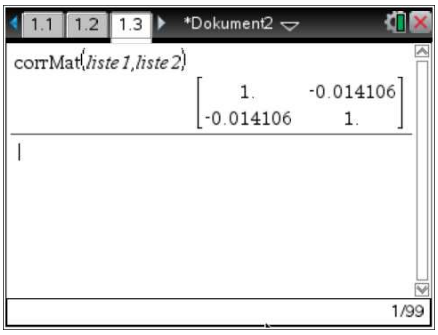
Aus n+1 Zufallszahlen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ kann man n Paare $(a_0;a_1), (a_1;a_2), \ldots, (a_{n-1};a_n)$ bilden und in einem Koordinatensystem darstellen. Man kann dann untersuchen, ob ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Zufallszahlen besteht (Reihen-Korrelationstest). Wenn kein solcher statistischer Zusammenhang vorliegt, müsste der Korrelationskoeffizient der Zahlenpaare nahe bei null liegen.

Wir betrachten eine Folge von 101 erzeugten Zufallszahlen (*Liste0*). Die ersten 100 Zahlen werden in *Liste1* übernommen (*b1 := a1*, dann drag&drop), die Elemente *a2* bis *a101* in *Liste2*.

Zu der entstehenden Punktwolke mit Koordinaten aus (*Liste1* | *Liste2*) wird eine Regressionsgerade bestimmt, ebenso zu den Punkten mit vertauschten Koordinaten.

Der Korrelationskoeffizient ergibt sich als geometrisches Mittel der beiden Geradensteigungen: $r = -\sqrt{(-0{,}014556)\cdot(-0{,}01367)} \approx -0{,}0141$. Diese Maßzahl kann man auch direkt mithilfe des Befehls corrMath(*liste1*, *liste2*) berechnen.

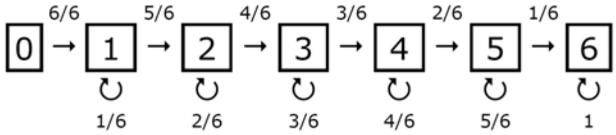




- Erzeugen Sie 500 [1000] Zufallspunkte im Einheitsquadrat und untersuchen Sie, ob ein funktionaler Zusammenhang der Punktkoordinaten erkennbar ist.

Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Warten auf eine vollständige Serie

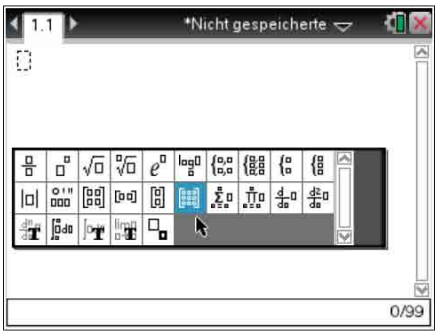
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Vorliegen einer vollständigen Serie nach k Stufen kann mithilfe einer Übergangsmatrix berechnet werden. Das folgende Übergangsdiagramm stellt das Warten auf eine vollständige Serie beim Würfeln dar. Dabei stehen in den Kästchen die möglichen Zustände des Prozesses (z. B. bedeutet 3, dass drei verschiedene Ergebnisse aufgetreten sind):

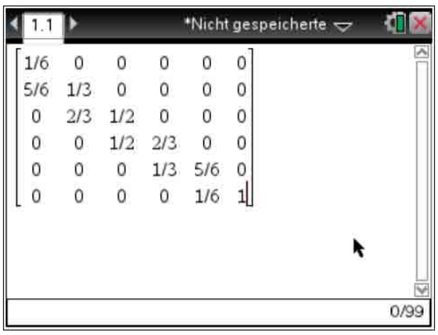


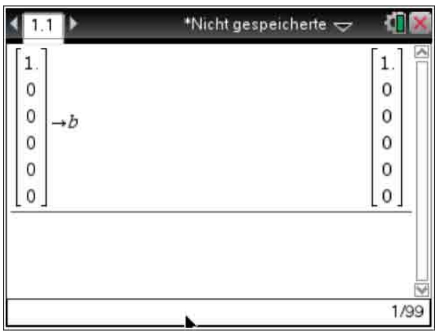
Die in der Tabelle rechts stehenden Werte geben die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass nach k Versuchen der Zustand 1, 2, 3, …, 6 erreicht ist, z. B. ist zu entnehmen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass nach 12 Würfen jede der sechs verschiedenen Augenzahlen mindestens einmal aufgetreten ist (= Zustand 6), 43,78 % beträgt.

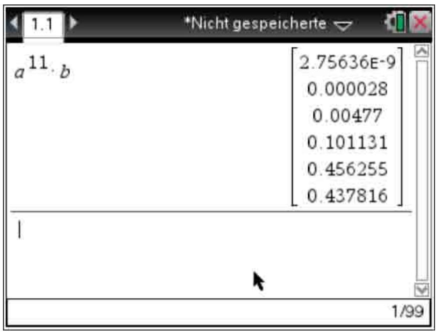
k	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0,1667	0,8333	0	0	0	0
3	0,0278	0,4167	0,5556	0	0	0
4	0,0046	0,1620	0,5556	0,2778	0	0
5	0,0008	0,0579	0,3858	0,4630	0,0926	0
6	0,0001	0,0199	0,2315	0,5015	0,2315	0,0154
7	0,0000	0,0068	0,1290	0,4501	0,3601	0,0540
8	0,0000	0,0023	0,0690	0,3646	0,4501	0,1140
9	0,0000	0,0008	0,0360	0,2776	0,4966	0,1890
10	0,0000	0,0003	0,0185	0,2031	0,5064	0,2718
11	0,0000	0,0001	0,0094	0,1446	0,4897	0,3562
12	0,0000	0,0000	0,0048	0,1011	0,4563	0,4378
13	0,0000	0,0000	0,0024	0,0698	0,4139	0,5139
14	0,0000	0,0000	0,0012	0,0477	0,3682	0,5828
15	0,0000	0,0000	0,0006	0,0324	0,3227	0,6442
16	0,0000	0,0000	0,0003	0,0219	0,2798	0,6980
17	0,0000	0,0000	0,0002	0,0148	0,2404	0,7446
18	0,0000	0,0000	0,0001	0,0099	0,2053	0,7847
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0067	0,1744	0,8189
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0045	0,1475	0,8480
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0030	0,1244	0,8726
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0020	0,1047	0,8933
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0879	0,9108
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0009	0,0737	0,9254

Die Übergangsmatrix kann über die [Vorlagen]-Taste als 6x6-Matrix eingegeben und mithilfe von [sto→] unter einer selbst gewählten Variablen abgespeichert werden, ebenso der Startvektor als 6x1-Matrix. Hier sollte die Dezimalzahl 1.0 eingetippt werden (statt der natürlichen Zahl 1), damit die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zustände als Dezimalzahlen und nicht als Brüche angezeigt werden.









- Erläutern Sie, wie die in der Tabelle oben rechts stehenden Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines GTR berechnet werden können.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer vollständigen Serie nach 30 Würfen [36 Würfen]

Zahlenfolge erzeugen

Folgen von Zahlen können erzeugt werden

– im *Lists & Spreadsheets–Modus* mithilfe des Menüs:
3: Daten / 1: Folge erzeugen

– im *Calculator-Modus* durch Eingabe des Befehls
seq(*Folgenvorschrift, Variable, Startwert, Endwert*) oder
seq(*Folgenvorschrift, Variable, Startwert, Endwert, Schrittweite*)
vgl. Beispiele rechts.

Da der Befehl für die Erzeugung *rekursiv definierter Folgen* kompliziert ist, sollte das Menü benutzt werden.

$\text{seq}(x^2,x,1,8)$	$\{1,4,9,16,25,36,49,64\}$
$\text{seq}\left(\frac{1}{x},x,1,10\right)$	$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}\right\}$
$\text{seq}(x,x,2,10,2)$	$\{2,4,6,8,10\}$

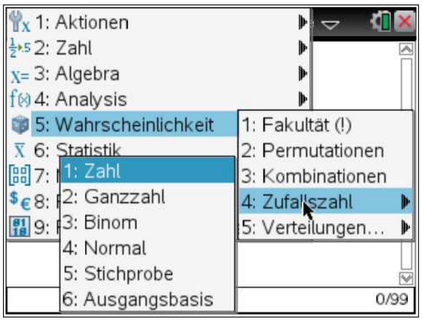
Zufallszahlen erzeugen

Zufallszahlen können erzeugt werden

– im *Lists & Spreadsheets–Modus* mithilfe des Menüs:
3: Daten / 5: Zufallszahl

– im *Calculator-Modus* mithilfe des Menüs:
5: Wahrscheinlichkeit / 4: Zufallszahl

oder durch Eingabe eines entspr. Befehls.



Zu unterscheiden sind

– Zufallszahlen aus dem Intervall [0 ; 1 [: **rand**()

– ganzzahlige Zufallszahlen nach Eingabe von kleinstem und größtem Wert: **randInt**(*UntGrenze, ObGrenze*)

– binomial- oder normalverteilte Zufallszahlen nach Eingabe der Parameter: **randBin**(*n,p*) bzw. **randNorm**(μ,σ)

– Zahlen aus einer vorgegebenen Liste (Stichprobe als Ziehen mit oder ohne Zurücklegen): **randSamp**(*Liste*, *Anzahl*) bzw. **randSamp**(*Liste, Anzahl*,**1**)

vgl. Beispiele rechts.

Soll mehr als eine Zufallszahl ausgegeben werden, dann ist die gewünschte Anzahl zu ergänzen.

Damit die Folge dererzeugten Zufallszahlen nicht immer mit dem selben Startwert beginnt, sollte jeder Nutzer eine eigene *Ausgangsbasis* mithilfe des Befehls **RandSeed** *Zahl* wählen.

rand()	0.947736
rand(4)	{0.378325,0.453008,0.477872,0.119817}
randInt(1,3)	2
randInt(1,3,5)	{3,1,1,2,1}

randBin(10,0.3)	2
randBin(10,0.3)	4
randBin(10,0.3,5)	{5,3,2,1,3}
randNorm(100,5)	91.4307
randNorm(100,5)	101.546
randNorm(100,5,4)	{93.5369,93.0196,89.9709,102.602}

randSamp({1,2,4,8},3)	{4,4,1}
randSamp({1,2,4,8},5)	{1,2,8,4,8}
randSamp({1,2,4,8},3,1)	{2,8,1}
randSamp({1,2,4,8},3,1)	{8,2,4}
randSamp({1,2,4,8},4,1)	{1,8,2,4}
randSamp({1,2,4,8},5,1)	"Fehler: Bereichsfehler"

Hinweis: Fehlermeldung, da beim Ziehen ohne Zurücklegen nicht 5 Elemente aus einer 4-elementigen Menge gezogen werden können.

RandSeed 123	*Fertig*
RandSeed π	*Fertig*
RandSeed $\frac{1}{3}$	*Fertig*

Binomialkoeffizienten berechnen

Binomialkoeffizienten können berechnet werden

– im *Calculator-Modus* mithilfe des Menüs:
5: Wahrscheinlichkeit / 3: Kombinationen

oder durch Eingabe eines entspr. Befehls, vgl. Beispiele rechts.

$\text{nCr}(49,6)$	13983816
$\frac{\text{nCr}(6,4)\cdot \text{nCr}(43,2)}{\text{nCr}(49,6)}$	$\frac{645}{665896}$
$\frac{\text{nCr}(6,4)\cdot \text{nCr}(43,2)}{\text{nCr}(49,6)}\cdot 1.$	0.000969

Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße können berechnet werden

– im *Lists & Spreadsheets–Modus* mithilfe des Menüs:
  4: Statistik / 2: Statistische Verteilungen
– im *Calculator-Modus* mithilfe des Menüs:
  5: Wahrscheinlichkeit / 5: Verteilungen oder auch
  6: Statistik / 5: Verteilungen

oder durch Eingabe eines entspr. Befehls:

binomPdf(*n,p*) gibt die vollständige Verteilung zurück

binomPdf(*n,p,k*) = Wahrscheinlichkeit für *k* Erfolge

$\text{binomPdf}\left(3,\frac{1}{4}\right)$	$\{0.421875, 0.421875, 0.140625, 0.015625\}$
$\text{binomPdf}\left(3,\frac{1}{4},1\right)$	0.421875

Kumulierte Binomialverteilung

Kumulierte Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße können durch Eingabe eines entspr. Befehls berechnet werden:

binomCdf(*n,p*) gibt die vollständige Verteilung zurück

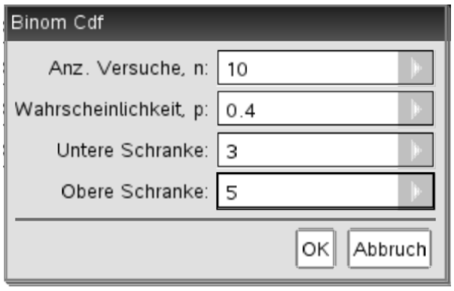
binomCdf(*n,p,k*) = Wahrscheinlichkeit für höchstens *k* Erfolge

binomCdf(*n,p,a,b*) = Wahrscheinlichkeit für mindestens *a* und höchstens *b* Erfolge

Nur die Intervall-Wahrscheinlichkeiten (also **binomCdf**(*n,p,a,b*)) können mithilfe der Menü-Optionen berechnet werden:

– im *Lists & Spreadsheets–Modus*: *4: Statistik / 2: Statistische Verteilungen*
– im *Calculator-Modus*: *5: Wahrscheinlichkeit / 5: Verteilungen* oder auch *6: Statistik / 5: Verteilungen*

binomCdf(3,0.4)	{0.216,0.648,0.936,1.}
binomCdf(10,0.4,4)	0.633103
binomCdf(10,0.4,3,5)	0.666472



Normalverteilung

Einzelwerte oder (Intervall-) Wahrscheinlichkeiten einer normalverteilten Zufallsgröße können berechnet werden

– im *Lists & Spreadsheets–Modus* mithilfe des Menüs:
  4: Statistik / 2: Statistische Verteilungen
– im *Calculator-Modus* mithilfe des Menüs:
  5: Wahrscheinlichkeit / 5: Verteilungen oder auch
  6: Statistik / 5: Verteilungen

oder durch Eingabe eines entspr. Befehls:

normPdf(x,μ,σ) = Funktionswert der GAUSS'schen Dichtefunktion an der Stelle *x*,

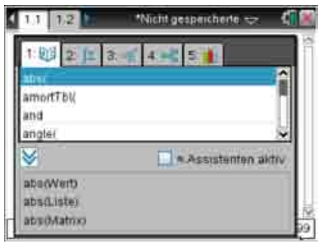
normCdf(a,b,μ,σ) = Wahrscheinlichkeit für das Intervall [a ; b]

μ, σ müssen nicht eingegeben werden, wenn $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ (standardisierte Normalverteilung): **normPdf**(*x*), **normCdf**(*a*,*b*)

normPdf(0)	0.398942
normPdf(-1)	0.241971
normPdf(2)	0.053991
normPdf(50,50,5)	0.079788
normPdf(49,50,5)	0.078209
normPdf(51,50,5)	0.078209

normCdf(-1,1)	0.682689
normCdf(-2,2)	0.9545
normCdf(39.5,60.5,50,5)	0.964271

Hinweise auf alle verfügbaren Befehle und deren Syntax findet man im Katalog.



Stochastik mit dem TI-Nspire ™ CX (GTR)

Haben Sie Fragen zu Produkten von Texas Instruments? Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien, der Ausleihe von Rechnern oder einer Lehrerfortbildung interessiert? Gerne steht Ihnen auch unser Customer Service Center mit Rat und Tat zu Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

Customer Service Center:
TEXAS INSTRUMENTS
Telefon: 00 800-4 84 22 73 7 (Anruf kostenlos)
Telefax: 00 420-2 26 22 17 99
ti-cares@ti.com
education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net