Tävlande funktioner - vilka växer snabbast?

"The mathematics of uncontrolled growth are frightening. A single cell of the bacterium E. coli would, under ideal circumstances, divide every twenty minutes. That is not particularly disturbing until you think about it, but the fact is that bacteria multiply geometrically: one becomes two, two become four, four become eight, and so on. In this way it can be shown that in a single day, one cell of E. coli could produce a super-colony equal in size and weight to the entire planet Earth."

Michael Crichton (1969) The Andromeda Strain

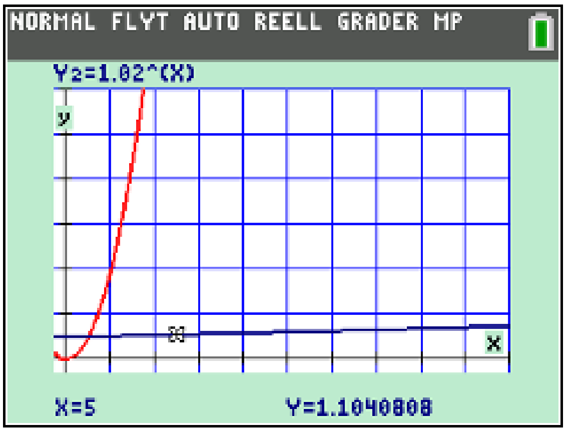
Du har kanske hört att exponentiell tillväxt kan betyda att något växer farligt snabbt. I början ser tillväxten så "snäll" ut men på längre sikt blir den "farlig". Vi ska på de följande sidorna undersöka exponentialfunktioner och deras tillväxt och jämföra med tillväxten hos andra typer av funktioner.

Vi tittar också på några data från den verkliga världen och undersöker enligt olika modeller vad som kan hända på sikt med halten av koldioxid i atmosfären – om vi inte gör något!

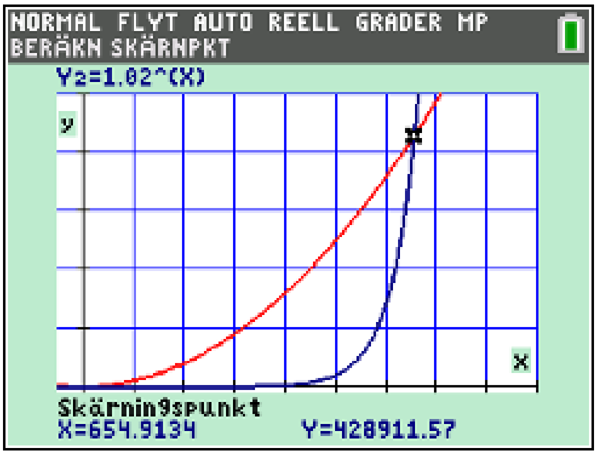
I det första problemet ska vi titta lite närmare hur olika typer av funktioner uppför sig för stora värden på den oberoende variabeln. Vi jämför potensfunktioner och exponentialfunktioner och intresserar oss särskilt för hur snabbt de växer.

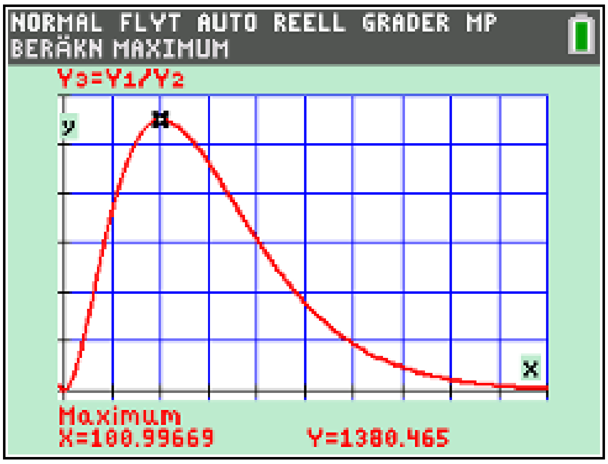
Övningen passar bäst för kurs 3 i samband med att man behandlar derivatabegreppet. Det är bra om du vet lite om egenskaper hos de nämnda funktionstyperna. I det andra problemet så förutsätts att man känner till begreppet regression och regressionsmodeller. Det behandlas i kurs 2.

Här har vi två funktioner där den ena, potensfunktionen $y = x^2$, till att börja med snabbt växer ifrån den andra. Den andra är en exponentialfunktion, $y = 1{,}02^x$, som "bara" växer med 2 % när x-värdet ökar med en enhet. Vad händer när x-värdet blir stort? Kommer exponentialfunktionen i kapp för stora värden på x? Det ser inte ut så. Vi får utöka fönstret i x- och y-led.

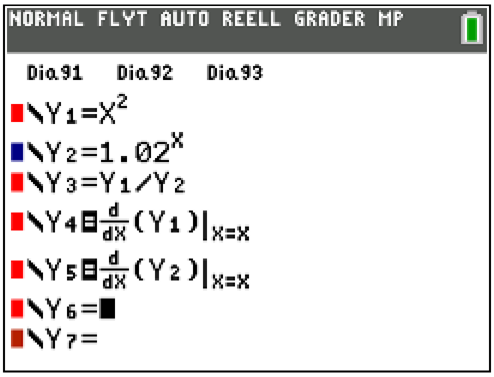


Efter lite trixande med koordinatsystemet så upptäcker vi att exponentialfunktionen faktiskt går om potensfunktionen. Det sker när x ≈ 655. Ett annat sätt att visa detta är att beräkna kvoten mellan funktionerna.

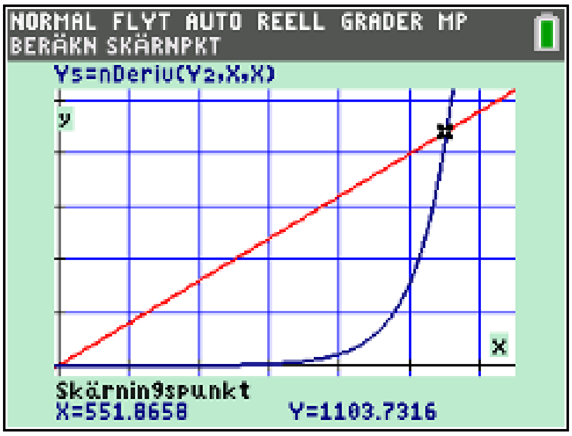




Som mest är potensfunktionen ca 1380 gånger större än exponentialfunktionen. Sedan avtar kvoten och vid x ≈ 654, som vi såg på före-gående sida, så är de lika "stora". Sedan avtar kvoten mot noll. Kanske kan det vara intressant att undersöka funktionernas derivator? Då kan vi ta reda på när funktionerna växer lika snabbt. Vi plottar nu de numeriska derivatorna av respektive funktion!

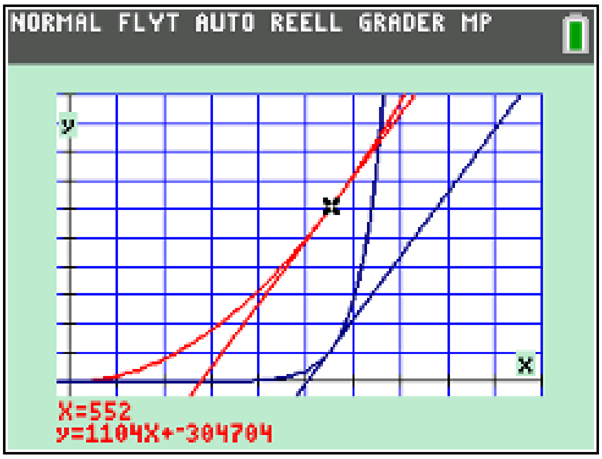


Derivatan av potensfunktionen är en linjär funktion, medan derivatan av en exponential-funktion också är en exponentialfunktion, så den hinner i kapp. Vid x ≈ 552 är denna exponential-funktion i kapp.

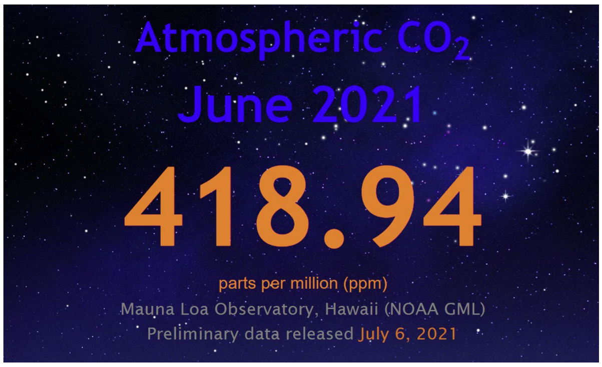


Om du trycker på [2nd] [draw] så kan man använda olika ritverktyg. Man kan till exempel rita tangen-ter till funktioner i valfri punkt. Här har vi plottat tangenter för båda funktionerna i den punkt där derivatan har samma värde. Tangenterna är för-stås parallella eftersom riktningskoefficienten anger derivatans värde.

Se nästa spalt.



Modellering med data från den verkliga världen

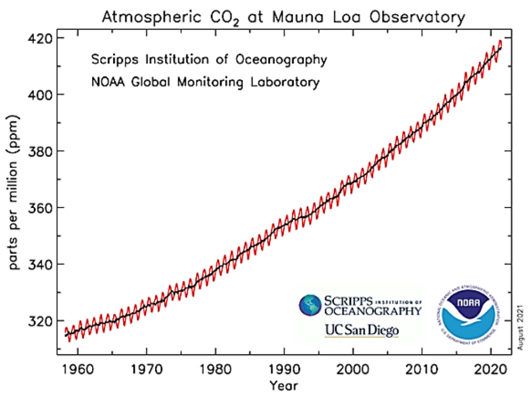


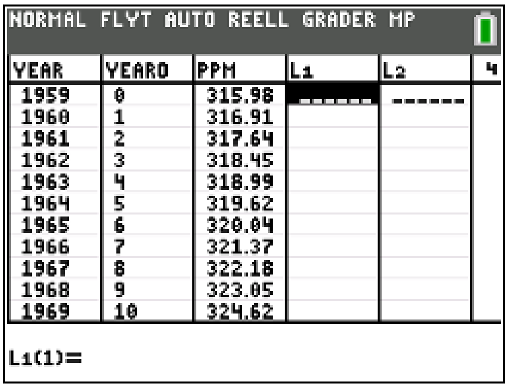
http://co2now.org/

Tidigare sidor vara bara en liten uppvärmning. Nu ska vi titta på verklighetens modeller. Koldioxid (CO_2) är den mest betydelsefulla växthusgasen från mänsklig aktivitet och orsakar global uppvärmning och klimatförändringar. En bra indikator på tillståndet är att titta på aktuella data från Mauna Loa Observatory på Hawaii.

På nästa sida visar vi i ett listor med årsmedel-värden för halten av CO_2 (i ppm) i atmosfären från 1959 till 2020. Vi har också en lista som visar differensen mot föregående år. Vi gör en del beräkningar och ser vad som händer med koldioxidhalten i framtiden om vi antar att halten av CO_2 fortsätter att växa enligt olika modeller.

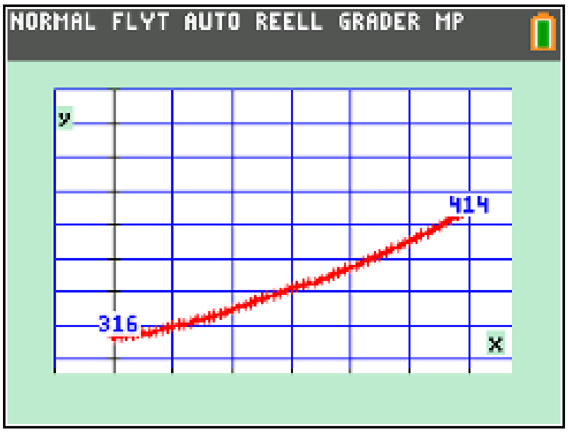
Koldioxidhalten varierar under året och det är därför man får en hackig kurva som nedan om man plottar värden för varje månad.





YEAR	YEAR0	PPM	L1	L2	4
1959	0	315.98	------	------	
1960	1	316.91			
1961	2	317.64			
1962	3	318.45			
1963	4	318.99			
1964	5	319.62			
1965	6	320.04			
1966	7	321.37			
1967	8	322.18			
1968	9	323.05			
1969	10	324.62			

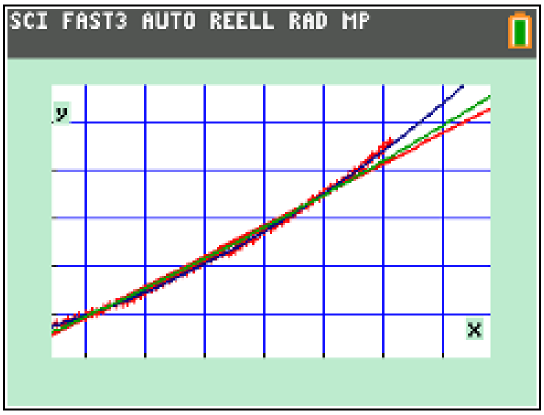
En plottning av data från listorna YEAR0 och PPM ser ut så här. Vi har lagt in årsmedelvärden för 1959 och 2020. Observera att skalan börjar vid 300 på y-axeln.



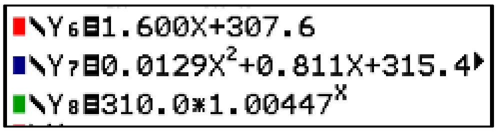
I nästa spalt har vi plottat årsmedelvärden av halten av CO_2 (ppm) i atmosfären från 1959 till 2020. Vi har gjort en *linjär*, *kvadratisk* och *exponentiell regressionsanalys*, som visas av de tunna linjerna. Gå till statistikeditorn och välj regressionsmodell under BERÄKNINGAR.

För den linjära modellen ser det ut så här i inmatningsfälten:

I det korta perspektivet verkar modellerna och data bete sig ganska linjärt.

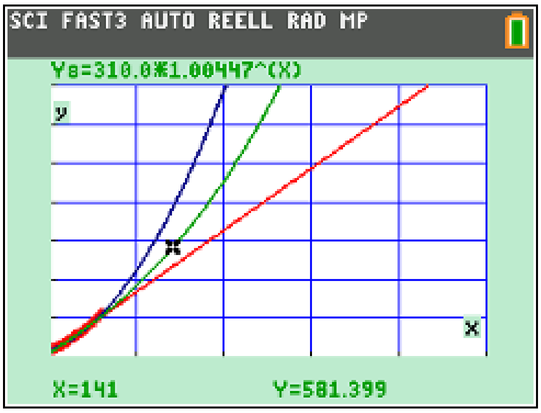


Här är också de framräknade regressions-ekvationerna:



Den exponentiella regressionsekvationen (den gröna) visar att koldioxidhalten i *genomsnitt* har stigit med ca 0,45 % varje år. Den kvadratiska regressionen verkar anpassas bäst till data. Vad händer om vi förlänger perspektivet många år framåt? Ställ om fönstret så att man kan se vad som händer om 100 år, 500 år ....

Här har vi dragit ut perspektivet till 500 år och vi ser att skillnaderna mellan de olika modellerna ökar. Klicka på kurvorna så ser du regressionsmodellen. Man ska naturligtvis vara väldigt försiktig att dra slutsatser när man extrapolerar modellerna framåt i tiden. Vad tror du händer med den röda kvadratiska och den gröna exponentiella kurvan om vi zoomar ut, dvs. ökar intervallet i x- och y-led ytterligare?



Efter 141 år, dvs år 2100 så skulle vi, enligt den exponentiella modellen, ha en koldioxidhalt i atmosfären på ca 580 ppm.

Modellerna som vi har räknat fram bygger på data under ca 60 år. Det intressanta nu är att titta på förändringarna för varje år och framför allt hur det ser ut nu på 2000-talet.

Vi ska då räkna ut de årsvisa förändringarna. Placera markören i till exempel lista L1 och tryck på [2nd] [list]för att komma år olika statistikverktyg. Väljs då alternativ **7:ΔLista** under OPS (står för OPTIONS). Skriv sedan så här:

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

YEAR	YEAR0	PPM	L1	L2
1959	0	315.98	------	------
1960	1	316.91		
1961	2	317.64		
1962	3	318.45		
1963	4	318.99		
1964	5	319.62		
1965	6	320.04		
1966	7	321.37		
1967	8	322.18		
1968	9	323.05		
1969	10	324.62		

L1=ΔLista(LPPM)

Tryck nu på [enter]. Nu får vi en lista med förändringar för varje år. För år 0 (1959) lägger vi till 0 (tryck på [2nd] [ins] för att infoga en rad i listan. Så här blir det då:

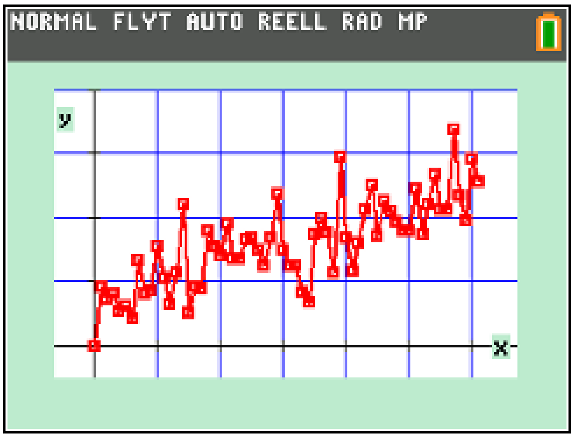
NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

YEAR	YEAR0	PPM	L1	L2
1959	0	315.98	0	------
1960	1	316.91	0.93	
1961	2	317.64	0.73	
1962	3	318.45	0.81	
1963	4	318.99	0.54	
1964	5	319.62	0.63	
1965	6	320.04	0.42	
1966	7	321.37	1.33	
1967	8	322.18	0.81	
1968	9	323.05	0.87	
1969	10	324.62	1.57	

L1(3)=0.73

0.93 är alltså differensen mellan 316.91 och 315.98.

Nu börjar det bli intressant. Vi plottar nu förändringarna för alla år.



Vi ser att det är stora fluktuationer mellan åren men trenden är ganska tydlig. Den årliga förändringen ökar. Vi ser att med något undantag att förändringarna/år under de senaste 10 åren har varit större än 2 ppm.