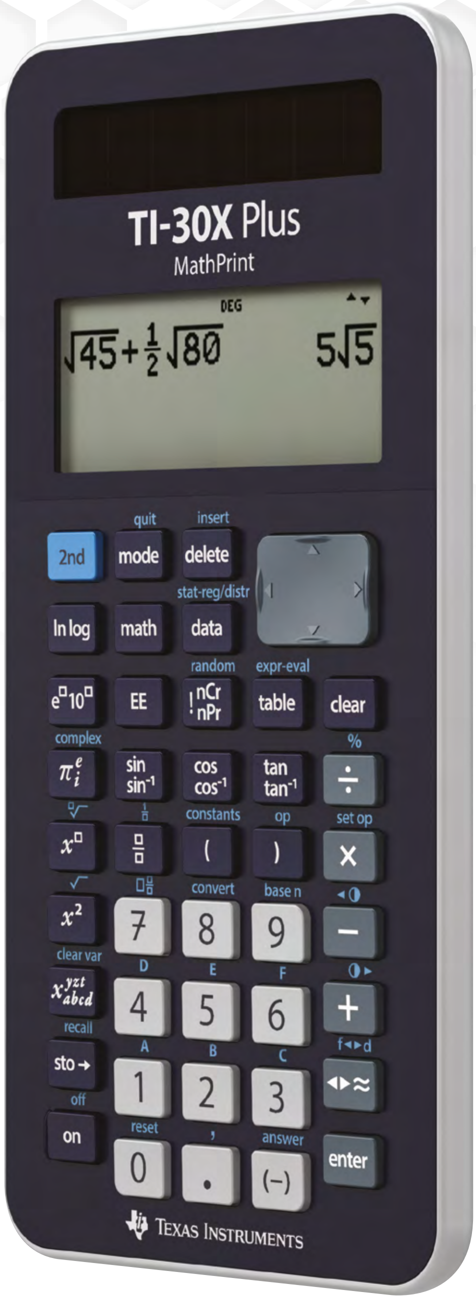
Heinz Klaus Strick

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgaben für das Fach Mathematik

aus dem Prüfungsjahr 2022



- Analysis
- Analytische Geometrie
- Lineare Algebra
- Stochastik

Texas Instruments

Dieses und weiteres Material steht Ihnen auf der TI Materialdatenbank zum Download bereit:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgaben für das Fach Mathematik

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik wird in zwei Teilen durchgeführt.

Im Prüfungsteil A ist eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht vorgesehen, im Prüfungsteil B dürfen Hilfsmittel verwendet werden. Beide Prüfungsteile enthalten Aufgaben zu jedem der Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik.

Der Prüfungsteil A besteht aus mehreren kurzen, nicht zusammenhängenden Aufgaben.
Für den Prüfungsteil B sind umfangreichere Aufgaben vorgesehen, für die als Hilfsmittel u. a. wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) zugelassen sind.

Grundlegendes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 100 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

<table>
<tr><th>Sachgebiet</th><th>Prüfungsteil A
(ohne Hilfsmittel)</th><th>Prüfungsteil B
(mit Hilfsmitteln)</th></tr>
<tr><td>Analysis</td><td rowspan="3">25</td><td>35</td></tr>
<tr><td>Stochastik</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Analytische Geometrie/
Lineare Algebra</td><td>20</td></tr>
</table>

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 60 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 165 Minuten vorgesehen.

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 120 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

<table>
<tr><th>Sachgebiet</th><th>Prüfungsteil A
(ohne Hilfsmittel)</th><th>Prüfungsteil B
(mit Hilfsmitteln)</th></tr>
<tr><td>Analysis</td><td rowspan="3">30</td><td>40</td></tr>
<tr><td>Stochastik</td><td>25</td></tr>
<tr><td>Analytische Geometrie/
Lineare Algebra</td><td>25</td></tr>
</table>

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 70 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 200 Minuten vorgesehen.

In der Vereinbarung der Länder wird die Funktionalität der zugelassenen Taschenrechner (WTR) eingeschränkt. Die WTR dürfen folgende Möglichkeiten *nicht* enthalten:

Analysis

- Umformen von Termen mit Variablen, Lösen von Gleichungen oder Gleichungssystemen, Differenzieren oder Integrieren, Berechnen von Werten einer Ableitungsfunktion oder eines Integrals, Darstellen von Graphen

Analytische Geometrie

- Rechnen mit Koordinaten (z. B. zum Aufstellen der Gleichung einer Ebene aus den Koordinaten dreier gegebener Punkte), Rechnen mit Vektoren (z. B. Bestimmen des Werts eines Skalarprodukts oder der Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren), Bestimmen der Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen, grafische Darstellungen geometrischer Objekte (z. B. Geraden oder Ebenen)

Lineare Algebra

- Rechnen mit Matrizen, Umformen von Matrizen (z. B. durch Zeilenoperationen)

Stochastik

- Berechnen von Werten eines Parameters einer Wahrscheinlichkeitsverteilung aus einem Wert dieser Verteilung und gegebenen Werten der weiteren zugehörigen Parameter

Es wird jedoch vorausgesetzt, dass der WTR über Funktionen eigens zum Berechnen von Werten der Binomialverteilung, der kumulativen Binomialverteilung und der Normalverteilung verfügt.

Der wissenschaftlicher Taschenrechner

TI-30X Plus MathPrint™

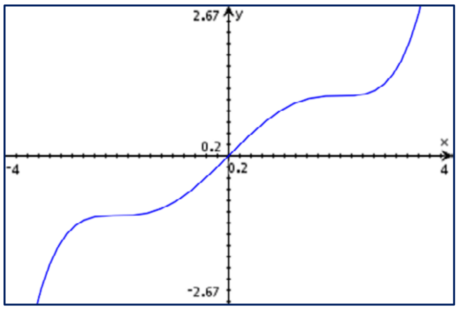
erfüllt alle diese Bedingungen.

Auf den folgenden Seiten finden Sie die Lösungen der Beispielaufgaben zum Prüfungsteil B des Pools für das Jahr 2022.

Die Aufgabenstellungen selbst sind von der Website des IQB abrufbar:

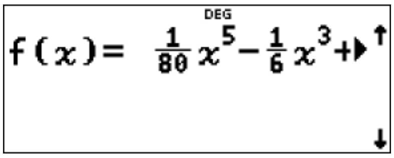
https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/mathematik/

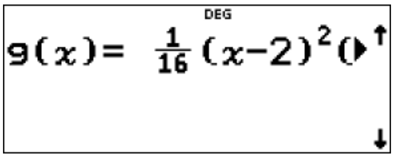
Analysis Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)

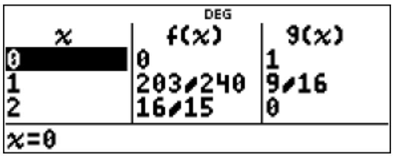
1a (2 BE)	Die (einzige) Nullstelle des Graphen von $f(x)=\frac{1}{80}x^5-\frac{1}{6}x^3+x$ liegt an der Stelle $x=0$. Eine Begründung hierfür ist auf vielfältige Arten möglich (einfache Begründungen zuerst):  Begründung 1: Einsetzen von $x=0$ ergibt $f(0)=0$. Begründung 2: Im Funktionsterm treten nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten auf, d. h., der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Da die Funktion für alle $x \in$ IR definiert ist, muss er durch den Ursprung verlaufen. Begründung 3: Klammert man $\frac{1}{80}x$ aus, dann ergibt sich $f(x)=\frac{1}{80}x\cdot(x^4-\frac{40}{3}x^2+80)$. Ein Produkt ist gleich null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich null ist. Für den biquadratischen Faktor ergibt sich nach Substitution mit $z=x^2$: $z^2-\frac{40}{3}z+80=0 \Leftrightarrow (z-\frac{20}{3})^2=\frac{400}{9}-80 \Leftrightarrow (z-\frac{20}{3})^2=-\frac{320}{9}$, d. h., aus dem Faktor vierten Grades ergibt sich keine weitere Nullstelle. Daher gibt es außer bei $x=0$ keine weitere Nullstelle des Graphen. Begründung 4: Aus dem Verlauf des Graphen (vgl. die oben stehende Abbildung), der Punktsymmetrie zum Ursprung (wo jeder punktsymmetrische Graph eine Wendestelle hat, wenn er für $x=0$ definiert ist), der Tatsache, dass eine ganzrationale Funktion 5. Grades maximal drei Wendepunkte haben kann und der Angabe, dass im Punkt W(2|f(2)) ein Wendepunkt vorliegt, dessen y-Koordinate gemäß Graph oberhalb der x-Achse liegt (entsprechend ein weiterer Wendepunkt unterhalb der x-Achse, vgl. Aufgabe 1b), folgt, dass bei $x=0$ die einzige Nullstelle des Graphen liegt.
1b (2 BE)	Da der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist (vgl. a)), muss auch der gespiegelte Punkt W*(-2|f(-2)) = (-2|-f(2)) ein Wendepunkt sein.
1c (3 BE)	Für die 1. Ableitung gilt: $f'(x)=\frac{5}{80}x^4-\frac{3}{6}x^2+1=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^2+1=\frac{1}{16}\cdot(x^4-8x^2+16)$ $=\frac{1}{16}\cdot(x^2-4)^2=\frac{1}{16}\cdot[(x-2)(x+2)]^2=\frac{1}{16}\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2$ Die Zerlegung des biquadratischen Terms in Faktoren erfolgt durch Substitution mit $z=x^2$ und Anwendung der binomischen Formel: $z^2-8z+16=(z-4)^2$.
1d (5 BE) table	Über die TABLE-Option des TI 30X Plus speichert man die Funktionsterme von f(x) und von g(x) := f'(x) und berechnet hiermit die benötigten Funktionswerte. Die Tangente durch den Ursprung hat die Steigung f'(0) = 1. Die Gleichung dieser Tangente ist daher $t_0(x) = x$.

<table>
<tr><td></td><td>
Die Tangente durch den Wendepunkt W(2 |16/15) hat die Steigung f‘(2) = 0.

Es handelt sich also um eine waagerechte Tangente, die parallel zur x-Achse verläuft. Die Tangente hat daher die Gleichung $t_2(x) = 16/15$.



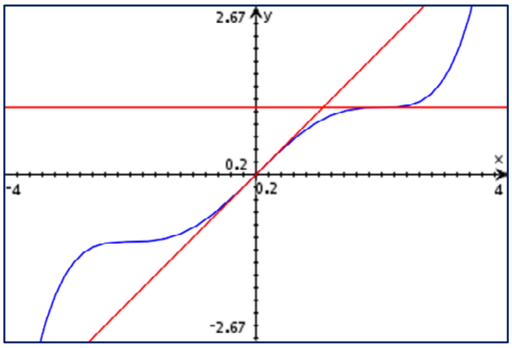




Der Schnittpunkt der beiden Tangenten erfüllt daher die Gleichung $x = \frac{16}{15}$.

Einsetzen in die Gleichungen der Tangenten ergibt $\left(\frac{16}{15} \mid \frac{16}{15}\right)$ als Schnittpunkt.

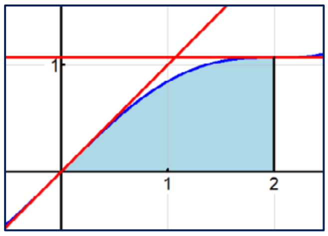
Die Grafik rechts zeigt den Graphen der Funktion und die beiden Tangenten.



</td></tr>
<tr><td>

1e

(3 BE)
</td><td>
Den Flächeninhalt des blau gefärbten Flächenstücks kann näherungsweise mithilfe des Flächeninhalts des Trapezes bestimmt werden, das durch die x-Achse, die beiden Tangenten sowie die Parallele zur y-Achse durch $x = 2$ festgelegt ist.



Hierfür gilt:

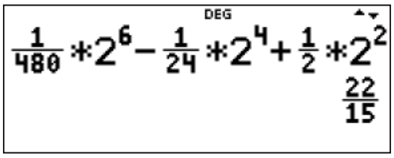
$$A_T = \tfrac{1}{2} \cdot \left(2 + \left(2 - \tfrac{16}{15}\right)\right) \cdot \tfrac{16}{15} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(2 + \tfrac{14}{15}\right) \cdot \tfrac{16}{15} = \tfrac{352}{225},$$

d. h., es gilt also $\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{14}{15}\right) \cdot \frac{16}{15} = \frac{352}{225}$.
</td></tr>
<tr><td>

1f

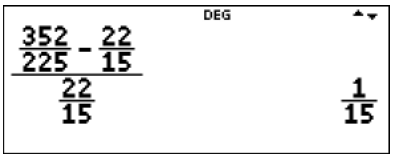
(4 BE)
</td><td>
Der Flächeninhalt des Flächenstücks ergibt sich gemäß dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung mithilfe einer Stammfunktion:

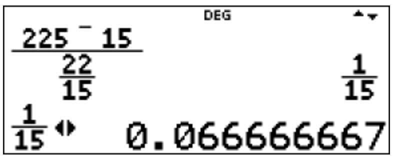
$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{480} x^6 - \tfrac{1}{24} x^4 + \tfrac{1}{2} x^2\right]_0^2 = \tfrac{22}{15}$$



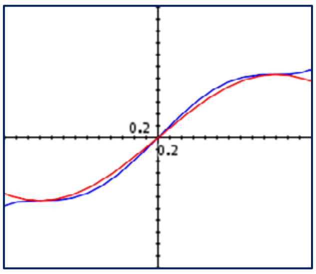
Die prozentuale Abweichung zum Näherungswert beträgt

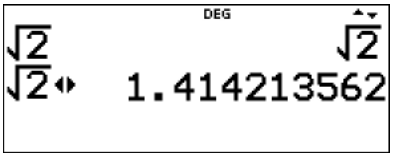
$\frac{1}{15} = 0{,}0\overline{6} = 6{,}\overline{6}\,\% \approx 7\,\%$

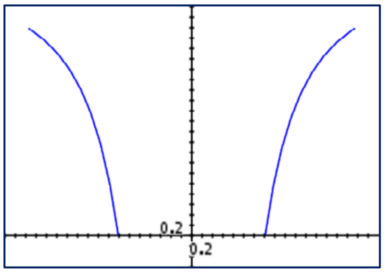




</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>1g
(4 BE)</td>
<td>
Die Bedingungen für eine Näherungsfunktion mit g(x) = a · sin(bx) gelten für das Intervall [-2 ; +2]. Da der Graph einer Sinusfunktion von diesem Typ durch den Ursprung verläuft, kommt es auf die Extrempunkte an, konkret muss gelten:
(1) g(x) hat eine Extremstelle bei x = 2
(2) $(2\,|\,\frac{16}{15})$ ist gemeinsamer Punkt der Graphen von f(x) und g(x)
Nach Kettenregel gilt: $g'(x) = ab \cdot \cos(bx)$
Aus der notwendigen Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle ergibt sich hieraus die folgende Bedingung für den Parameter b:
$g'(2) = ab \cdot \cos(2b) = 0 \Leftrightarrow \cos(2b) = 0 \Leftrightarrow 2b = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{4}$
und weiter
$g(2) = a \cdot \sin(\frac{\pi}{4} \cdot 2) = a \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = a \cdot 1 = \frac{16}{15}$
Hieraus ergibt sich die Funktionsgleichung
$g(x) = \frac{16}{15} \cdot \sin(\frac{\pi}{4} \cdot x)$


Hinweis: Die Grafik rechts zeigt die gute Anpassung der Funktion f(x) im Intervall [-2 ; +2].
</td>
</tr>
<tr>
<td>2a
(3 BE)</td>
<td>
Für die Nullstellen der Funktion h(x) gilt:
$h(x) = 5 - \frac{10}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$




Hieraus ergibt sich, dass die Nullstellen einen Abstand von $2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}8$ haben, in der Realität ergibt sich daher ein Durchmesser von ca. 28 cm.
</td>
</tr>
<tr>
<td>2b
(4 BE)</td>
<td>
Das Volumen V eines Zylinders mit Durchmesser 24 cm, also mit Radius 12 cm, berechnet sich zu
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 12^2 \cdot h = 144 \cdot \pi \cdot h$
Aus der Bedingung V = 16 dm³ = 16000 cm² ergibt sich
$144 \cdot \pi \cdot h = 16000 \Leftrightarrow h \approx 35{,}37$
d. h. eine Zylinderhöhe von ca. 35 cm.
Da der Übertopf einen Durchmesser von ca. 28 cm und eine Höhe von 40 cm hat und der Pflanztopf einen Durchmesser von 24 cm und eine Höhe von ca. 35 cm hat, passt der Pflanztopf in den Übertopf.
</td>
</tr>
<tr>
<td>2c
(5 BE)</td>
<td>
Der untere Rand eines Übertopfs, der durch $h_k(x) = k - \frac{10}{x^2}$ definiert ist, ergibt sich
aus $h_k(x) = k - \frac{10}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{k} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{10}{k}} \vee x = \sqrt{\frac{10}{k}}$
</td>
</tr>
</table>

Der obere Rand dieses Übertopfs ist daher bestimmt durch

$$k - \tfrac{10}{x^2} = 4 \Leftrightarrow k - 4 = \tfrac{10}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \tfrac{10}{k-4} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\tfrac{10}{k-4}} \vee x = \sqrt{\tfrac{10}{k-4}}\,.$$

Die Bedingung, dass der Radius des oberen Randes doppelt so groß sein soll wie der des unteren Randes, ist erfüllt für $k = \frac{16}{3}$, denn

$$\sqrt{\tfrac{10}{k-4}} = 2 \cdot \sqrt{\tfrac{10}{k}} \Leftrightarrow \tfrac{10}{k-4} = 4 \cdot \tfrac{10}{k} \Leftrightarrow 10k = 40k - 160 \Leftrightarrow 30k = 160 \Leftrightarrow k = \tfrac{16}{3}\,.$$

Analysis Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)

1a
(5 BE)

Schnittpunkt des Graphen von $f(x) = (x+2)\cdot e^{-x}$ mit der y-Achse: (0|2),
denn $f(0) = 2\cdot e^{-0} = 2$;
Schnittpunkt mit der x-Achse: (-2|0), denn $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ und $e^{-x} \neq 0$ für alle x.

Die 1. Ableitung wird mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt:

$$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (x+2)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = -(x+1)\cdot e^{-x}$$

Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums ist für x = -1 erfüllt: $f'(x) = -(x+1)\cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Es handelt sich um ein lokales Maximum, wie man wie folgt mithilfe des Vorzeichens der 2. Ableitung an dieser Stelle begründen kann:

$f''(x) = -1\cdot e^{-x} - (x+1)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = x\cdot e^{-x}$ und $f''(-1) = (-1)\cdot e^{1} < 0$

Alternativ bestimmt man eine Vorzeichentabelle für die 1. Ableitung:

Intervall	Beispiel	Monotonie	Vorzeichenwechsel
$x < -1$	$f'(-2) = 1\cdot e^2 > 0$	streng mon. steigend	von + nach –
$x > -1$	$f'(0) = -1\cdot e^0 < 0$	streng mon. fallend	

An der Stelle $x = -1$ liegt daher ein Hochpunkt vor mit $f(-1) = 1\cdot e^1 = e$.

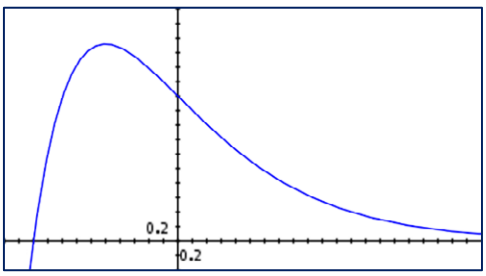
1b
(2 BE)

Für größer werden x-Werte nähert sich der Graph der x-Achse asymptotisch von oben, denn die Potenz e^{-x} geht schneller gegen null als der lineare Faktor $(x+2)$ wächst: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

1c
(2BE)

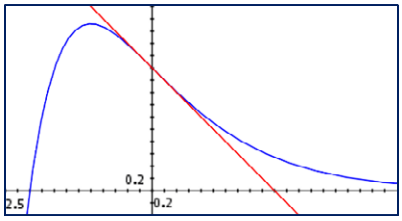
Mithilfe der in den Teilaufgaben a) und b) ermittelten Eigenschaften f(-2) = 0 (Nullstelle) , f(-1) = e (Hochpunkt), f(0) = 2 (Schnittpunkt mit der y-Achse) und asymptotisches Verhalten $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,

ist eine Skizze des Graphen von f möglich, vgl. rechts.



1d

(5 BE)



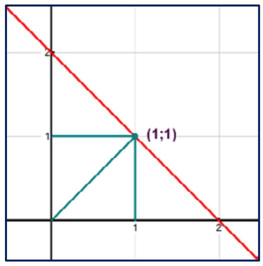
Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt (0|2):

Aus $f(0)=2;\ f'(0)=-1$ ergibt sich

$t(x)=f'(0)\cdot(x-0)+f(0)=-1\cdot(x-0)+2=-x+2$

Die Tangente schneidet die x-Achse im Punkt (2|0).

Das Dreieck mit den Eckpunkten (0|0), (2|0), (0|2) hat Seiten mit den Seitenlängen $2;\ \sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};\ 2$; der Umfang des Dreiecks beträgt also $4+2\sqrt{2}\approx 6{,}83$.



Der Punkt, der von allen Eckpunkten eines Dreiecks den gleichen Abstand hat, ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks; dieser ist der gemeinsame Punkt der drei Mittelsenkrechten des Dreiecks.

Hieraus folgt, dass der auf der Tangente liegende Punkt (1|1) derjenige Punkt ist, der von den drei Eckpunkten (0|0), (2|0), (0|2) den gleichen Abstand hat, vgl. Grafik rechts.

1e

(4 BE)

Aus dem Graphen der Funktion $f(x)=(x+2)\cdot e^{-x}$ erhält man durch Spiegelung an der x-Achse den Graphen der Funktion $f_1(x)=-(x+2)\cdot e^{-x}$ – dazu muss der ursprüngliche Funktionsterm mit (-1) multipliziert werden.

Streckt man den Graphen der Funktion f_1 mit dem Faktor $\frac{1}{e}$ in Richtung der y-Achse, dann lautet die neue Funktionsgleichung $f_2(x)=-\frac{1}{e}\cdot(x+2)\cdot e^{-x}=-(x+2)\cdot e^{-x-1}$ dazu muss der letzte Funktionsterm mit $\frac{1}{e}$ multipliziert werden.

Und verschiebt man diesen Graphen um 1 nach rechts, so erhält man schließlich $g(x)=f_2(x-1)=-(x-1+2)\cdot e^{-(x-1)-1}=-(x+1)\cdot e^{-x}$ – dazu muss im letzten Funktionsterm x durch (x – 1) ersetzt werden.

Der zuletzt erhaltene Funktionsterm ist gerade gleich dem Term der 1. Ableitung der Ausgangsfunktion f(x), vgl. Teilaufgabe 1a).

1f

(4 BE)

Gesucht werden geeignete Zahlen *a*, *b*, *k*, für die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Da der Graph der Funktion g durch Spiegelung an der x-Achse, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{e}$ in Richtung der y-Achse und Verschiebung um 1 Einheit nach rechts aus dem Graphen der Funktion f entstanden ist, muss dies entsprechend bei den Integrationsgrenzen und bei dem Vorfaktor *k* berücksichtigt werden:

Aus dem Integrationsintervall [0;2] wird durch die Verschiebung um 1 Einheit nach rechts das Intervall [a;b] = [1;3].

Die Streckung und die Spiegelung werden durch Multiplikation mit dem negativen Kehrwert von $-\frac{1}{e}$, also durch $k=-e$, ausgeglichen.

Hinweis: Mithilfe der Beziehung aus der vorangehenden Aufgabe 1e) könnte das Integral konkret berechnet werden. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung kann nämlich das rechts stehende Integral mithilfe einer Stammfunktion für g(x), also mithilfe von f(x) bestimmt werden:

$$k \cdot \int_a^b g(x)\,dx = -e \cdot \int_1^3 g(x)\,dx = -e \cdot [G(x)]_1^3 = -e \cdot [f(3) - f(1)]$$

$$= -e \cdot [5 \cdot e^{-3} - 3 \cdot e^{-1}] = -5 \cdot e^{-2} + 3 = \int_0^2 f(x)\,dx$$

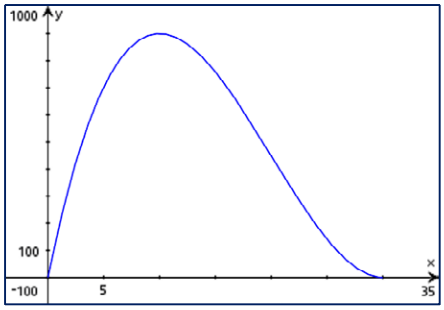
Das war jedoch hier *nicht* verlangt, sondern nur die Beschreibung, wie sich die Transformationen auf die Koeffizienten a, b, k auswirken.

2a

(3 BE)

table

Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem der Tauchroboter, dessen Bewegung im Zeitraum 0 ≤ t ≤ 30 (Minuten) mithilfe der Funktion $h(t) = \frac{9}{40}t^3 - \frac{27}{2}t^2 + \frac{405}{2}t$ beschrieben werden kann, den größten Abstand zur Wasseroberfläche erreicht hat.



Gesucht ist also der Hochpunkt der Modellfunktion:

Notwendige Bedingung: $h'(t) = \frac{27}{40}t^2 - 27t + \frac{405}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{27}{40}t^2 - 27t + \frac{405}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 300 = 0 \Leftrightarrow (t-20)^2 = 400 - 300 \Leftrightarrow t = 20 \pm 10$.

Hinreichende Bedingung:

– Nachweis mithilfe der 2. Ableitung: $h''(t) = \frac{27}{20}t - 27$ mit $h''(10) = -\frac{27}{2} < 0$. Zum Zeitpunkt t = 10 liegt also ein lokales Maximum vor (maximale Tauchtiefe).

(Zum Zeitpunkt t = 30 liegt wegen und $h''(30) = \frac{27}{2} > 0$ ein lokales Minimum vor; nach diesem Zeitpunkt des Wiederauftauchens des Tauchroboters ist nicht gefragt.)

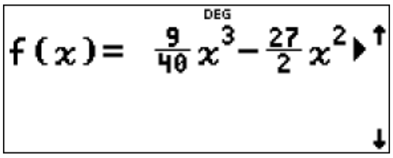
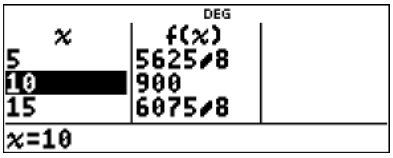
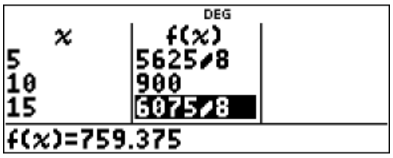
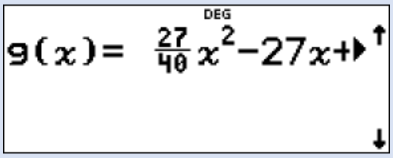
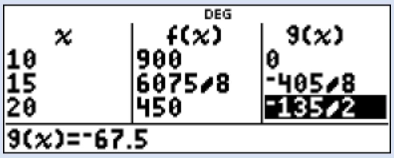
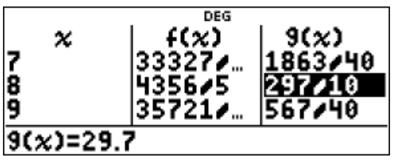
– Nachweis mithilfe des Vorzeichenwechsels der 1. Ableitung:

Intervall	Beispiel	Monotonie	Vorzeichenwechsel
t < 10	$h'(5) > 0$	streng mon. steigend	von + nach –
$10 < t < 30$	$h'(15) < 0$	streng mon. fallend	

An der Stelle $t = 10$ liegt daher ein Hochpunkt vor mit

$h(10) = \frac{9}{40} \cdot 1000 - \frac{27}{2} \cdot 100 + \frac{405}{2} \cdot 10 = 900$.

Die maximale Tauchtiefe von 900 Metern wird also nach 10 Minuten erreicht, vgl. auch die folgenden WTR-Bilder.

	 
2b (3 BE) table	Die in den ersten 15 Minuten zurückgelegte Strecke ergibt sich aus der maximalen Tauchtiefe nach 10 Minuten (= 900 m) sowie aus der Auftauchstrecke in den nächsten 5 Minuten: h(10) – h(15) ≈ 900 – 760 = 140 m  Der Tauchroboter legt in den ersten 15 Minuten eine Strecke von ca. 1040 m zurück.
2c (2 BE) table	Aus dem Verlauf des Graphen wird deutlich, dass der Auftauchprozess zunächst mit wachsender Geschwindigkeit, dann wieder mit verringerter Geschwindigkeit abläuft. Der Wendepunkt des Graphen gibt daher den Zeitpunkt und die zugehörige aktuelle Tauchtiefe des Roboters an, zu dem die Geschwindigkeit am größten ist.
	Bestimmung der Wendestelle und der maximalen Geschwindigkeit (*nicht verlangt*): Aus der notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunkts ergibt sich der Zeitpunkt: $h''(t) = \frac{27}{20}t - 27 = 0 \Leftrightarrow t = 20$; die zugehörige Tauchtiefe beträgt dann h(20) = 450 m. Für die maximale Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 20 ergibt sich: 67,5 m/min.   xx
2d (5 BE) table	Untersucht wird abschließend noch einmal die Phase des Tauchvorgangs, in der der Tauchroboter sich nach unten bewegt. Um den Zeitraum zu bestimmen, in dem die Geschwindigkeit größer als 29,7 m/min ist, muss die quadratische Gleichung $h'(t) = \frac{27}{40}t^2 - 27t + \frac{405}{2} = 29{,}7$ gelöst werden: $\frac{27}{40}t^2 - 27t + \frac{405}{2} = 29{,}7 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 300 = 44 \Leftrightarrow (t-20)^2 = 400 - 256 \Leftrightarrow t = 20 \pm 12$ Im Sachzusammenhang kommt nur t = 8 infrage. Aus dem Verlauf des Graphen ergibt sich, dass die Tauchgeschwindigkeit in den ersten 8 Minuten größer ist als 29,7 m/min. 

Analysis Beispiel 3 (erhöhtes Anforderungsniveau)

<table>
<tr><td>

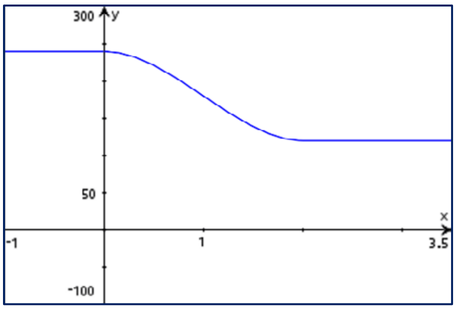
1a

(4 BE)

table

</td><td>

Die Geschwindigkeit eine halbe Minute nach 15:00 Uhr ergibt sich aus dem Funktionswert der Modellierungsfunktion $f(x)=30x^3-90x^2+240$ an der Stelle x = 0,5:

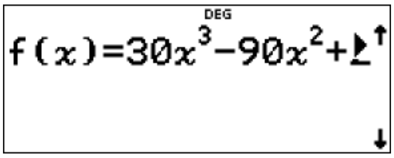


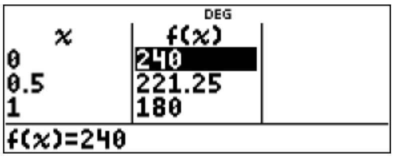
Es gilt f(0,5) = 221,25 ; d. h., die Geschwindigkeit beträgt also ca. 221 km/h.

Aus der Wertetabelle des WTR lesen wir ab:

f(0) – f(0,5) = 18,75 und f(0,5) – f(1) = 41,25, d. h.,

die Geschwindigkeit nimmt in der ersten halben Minute weniger stark ab als in der zweiten halben Minute $(18{,}75 < 41{,}25)$.





</td></tr>
<tr><td>

1b

(4 BE)

</td><td>

Die 1. Ableitung der Modellfunktion f beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit des ICE. Gesucht ist das Minimum der 1. Ableitung $f'(x)=90x^2-180x$.

Dies ergibt sich aus der Nullstelle der 2. Ableitung:

$f''(x)=180x-180=0 \Leftrightarrow x=1$ (notwendige Bedingung)

Da es sich bei dem Graphen von $f'(x)=90x^2-180x=90x\cdot(x-2)$ um eine quadratische Parabel mit den Nullstellen bei x = 0 und x = 2 handelt, liegt der Scheitelpunkt dieser Parabel in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.

Die Geschwindigkeit nimmt also zum Zeitpunkt 15:01 Uhr am stärksten ab.

</td></tr>
<tr><td>

1c

(3 BE)

table

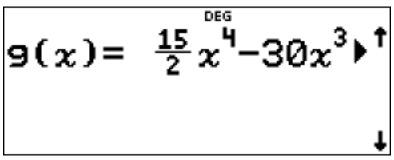
</td><td>

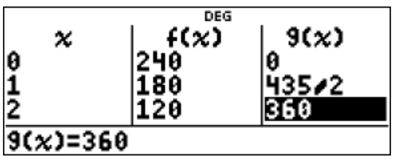
Um die in den ersten zwei Minuten nach 15:00 Uhr zurückgelegte Strecke zu bestimmen, muss der Flächeninhalt unter dem Graphen der Modellierungsfunktion berechnet werden, also das Integral über dem Intervall [0;2].

Man beachte dabei, dass auf den beiden Achsen unterschiedliche Einheiten abgetragen werden: Auf der x-Achse die Zeit in Minuten, auf der y-Achse die Geschwindigkeit in *km/h*. Das Ergebnis des Integrals würde also in $\frac{km}{h}\cdot\text{min}$ angegeben. Um die Strecke in *km* angeben zu können, muss der Faktor $\frac{1}{60}$ vor das Integral gesetzt werden, um die Einheit $\frac{km}{h}\cdot h=km$ zu erhalten:

$\frac{1}{60}\cdot\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{60}\cdot[\frac{15}{2}x^4-30x^3+240x]_0^2=\frac{1}{60}\cdot(360-0)=6$.

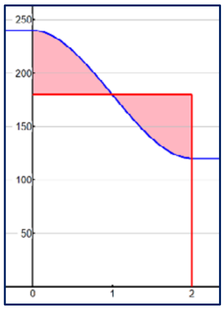
Der ICE legt daher in den ersten zwei Minuten eine Strecke von 6 km zurück.





</td></tr>
</table>

Die vom ICE zurückgelegte Strecke kann auch wie folgt bestimmt werden:

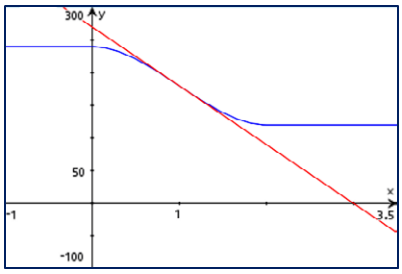


Der Graph von f(x) ist (offensichtlich) punktsymmetrisch zum Punkt (1|180); daher ist das pink gefärbte Flächenstück im Intervall [0;1] genauso groß wie das im Intervall [1;2], d. h., das Integral über f(x) im Intervall [0;2] so groß wie der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen 2 min und 180 km/h, also gleich $\frac{2}{60}\,h \cdot 180\,\frac{km}{h} = 6\,km$.

1d

(5 BE)

Wenn sich die Abnahme der Geschwindigkeit von 15:01 Uhr an nicht mehr verändern würde, dann würde der ICE nach drei Kilometern zum Stehen kommen; denn die Beibehaltung der Geschwindigkeitsabnahme zum Zeitpunkt x = 1 bedeutet: Fortsetzung des Graphen der Modellfunktion vom Wendepunkt (1|180) an längs der Tangente.



Gleichung der Wendetangente:

$$t(x) = f'(1)\cdot(x-1) + f(1) = -90\cdot(x-1) + 180 = -90x + 270$$

Nullstelle der Wendetangente: t(x) = 0 ⇔ x = 3, d. h., der ICE kommt um 15:03 Uhr zum Stehen. Den bis dahin zurückgelegten Weg berechnet man mithilfe des Flächeninhalts der Fläche unter dem Graphen der Tangente:

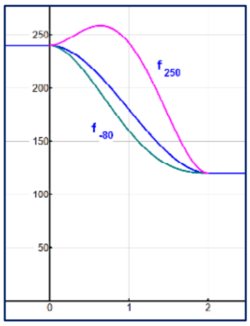
$$\int_1^3 t(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\cdot 2\,\text{min}\cdot 180\,\tfrac{km}{h} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{60}\,h\cdot 180\,\tfrac{km}{h} = 3\,km$$

1e

(2 BE)

Um zu überprüfen, ob auch andere Funktionen der Funktionenschar

$$f_p(x) = \tfrac{p}{4}\cdot x^4 + (30-p)\cdot x^3 + (p-90)\cdot x^2 + 240$$



einen glatten Übergang an der Stelle x = 0 und an der Stelle x = 2 haben, muss untersucht werden, ob die Eigenschaften $f_p(0) = 240$, $f_p'(0) = 0$, $f_p(2) = 120$ und $f_p'(2) = 0$ erfüllt sind.

Zusatz (nicht verlangt):

Die Stetigkeitsbedingung $f_p(0) = 240$ ist offensichtlich für alle p erfüllt. Weiter gilt:

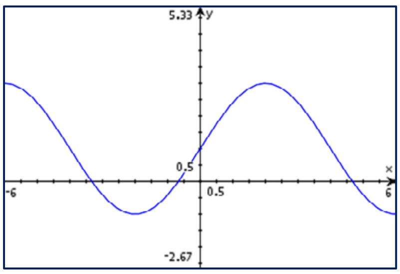
$$f_p(2) = 4p + 8\cdot(30-p) + 4\cdot(p-90) + 240 = 4p + 240 - 8p + 4p - 360 + 240 = 120$$

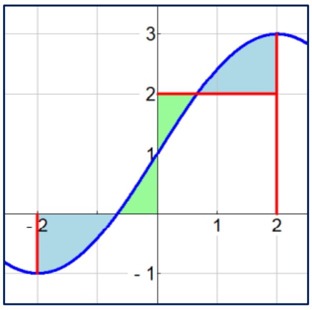
Um die Glattheit an den Übergangsstellen zu überprüfen, bestimmen wir zunächst $f_p'(x) = p\cdot x^3 + 3\cdot(30-p)\cdot x^2 + 2\cdot(p-90)\cdot x$.

Hier gilt: $f_p'(0) = 0$ sowie

$$f_p'(2) = 8p + 12\cdot(30-p) + 4\cdot(p-90) = 8p + 360 - 12p + 4p - 360 = 0$$

1f (3 BE)	Da $f_0(x) = \frac{0}{4} \cdot x^4 + (30-0) \cdot x^3 + (0-90) \cdot x^2 + 240 = 30 \cdot x^3 - 90 \cdot x^2 + 240 = f(x)$ stimmen die Funktionsterme der beiden Funktionen ein, wenn p = 0 ist. Aus dem Graphen entnehmen wir, dass der Graph f_{250} zunächst einen steigenden Verlauf hat – bis hin zu einem Hochpunkt, dass also die Geschwindigkeit zunächst nicht abnimmt, was nicht mit der in der Aufgabenstellung beschriebenen Eigenschaft übereinstimmt, nämlich dass die Geschwindigkeit im Zeitraum von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr abnimmt. Diese Eigenschaft wird jedoch von f_{-80} erfüllt.
1g (4 BE)	Die Nullstellen der Ableitungsfunktion $f_p'(x) = p \cdot x^3 + 3 \cdot (30-p) \cdot x^2 + 2 \cdot (p-90) \cdot x$ liegen an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ (vergleiche *Zusatz*) sowie bei $x_3 = 1 - \frac{90}{p}$. Diese Stelle $x_3 = 1 - \frac{90}{p}$ liegt links von $x_1 = 0$, wenn $0 < p \leq 90$, und rechts von $x_2 = 2$, wenn $-90 \leq p < 0$. Dies bedeutet, dass der Graph nur im Falle $-90 \leq p \leq 90$ und $p \neq 0$ einen Verlauf hat, der keinen Extrempunkt zwischen den beiden Zeitpunkten x = 0 und x = 2 enthält, und daher zur Beschreibung der Geschwindigkeitsentwicklung geeignet ist.
	Zusatz (nicht verlangt): Die Information $x_3 = 1 - \frac{90}{p}$ kann man durch Koeffizientenvergleich herausfinden: $f_p(x) = 0 \Leftrightarrow p \cdot x^3 + 3 \cdot (30-p) \cdot x^2 + 2 \cdot (p-90) \cdot x = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{90-3p}{p} \cdot x^2 + \frac{2p-180}{p} \cdot x = 0$ Dann muss gelten: $x^3 + \frac{90-3p}{p} \cdot x^2 + \frac{2p-180}{p} \cdot x = x \cdot (x-2) \cdot (x-x_3)$, also $x^2 + \frac{90-3p}{p} \cdot x + \frac{2p-180}{p} = x^2 - (2+x_3) \cdot x + 2x_3$ und somit $\frac{2p-180}{p} = 2x_3 \Leftrightarrow \frac{p-90}{p} = x_3 \Leftrightarrow 1 - \frac{90}{p} = x_3$.

2a (3 BE)	Aus den Angaben $s(x) = a \cdot \sin(bx) + 1$ und $E_1(-2\|-1)$ und $E_2(2\|3)$ für direkt aufeinanderfolgende Extrempunkte folgt aus der symmetrischen Lage der beiden Punkte zu $(0\|1)$, dass – die Periodenlänge gleich 4 ist (= doppelt so lang wie die Differenz der x-Koordinaten der beiden Extrempunkte) und – die Amplitude gleich 4 (= Differenz der y-Koordinaten der beiden Extrempunkte)  ist, also a = 2 und $b = \frac{\pi}{4}$, d. h., die Funktionsgleichung lautet $s(x) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{4} x) + 1$.

2b (5 BE)	 Da der Graph punktsymmetrisch ist zu (0|1), folgt dass die gleichfarbigen Flächenstücke in der Grafik rechts gleich groß sind. Insbesondere gilt für die blau gefärbten Flächenstücke: Das unterhalb der x-Achse Flächenstück geht negativ in die Berechnung des Integrals ein; es ist genauso groß wie das blau gefärbte Flächenstück oberhalb des Quadrats, das bei der Berechnung des Flächeninhalts des Quadrats nicht berücksichtigt wird. Hieraus ergibt sich, dass das Integral mithilfe des Quadrats der Seitenlänge 2 berechnet werden kann: $\int_{-2}^{2} s(x)\,dx = 4$.
2c (4 BE)	Für die Ableitungen gilt: $s'(x) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}x) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{4}x)$ und $s''(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{4}x) \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi^2}{8} \cdot \sin(\frac{\pi}{4}x)$. Die Lage der Wendepunkte des Graphen ergibt sich aus der notwendigen Bedingung $s''(x) = -\frac{\pi^2}{8} \cdot \sin(\frac{\pi}{4}x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{4}x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}x = k \cdot \pi \Leftrightarrow x = 4k$ für ganzzahlige k. Die Steigung in den Wendepunkten beträgt $s'(4k) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} \cdot 4k) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(k \cdot \pi) = \frac{\pi}{2} \cdot (\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2}$.
2d (3 BE)	Die Wendepunkte haben die Koordinaten (4k|1). Die Steigung einer Geraden durch einen der Wendepunkte und den Punkt (2022|2022) beträgt $m = \dfrac{2022-1}{2022-4k} = \dfrac{2021}{2022-4k}$. Dies ist eine rationale Zahl, die auf keinen Fall gleich der irrationalen Zahl $\pm\frac{\pi}{2}$ sein kann. Daher ist es nicht möglich, dass eine dieser Geraden Wendetangente des Graphen der Funktion s(x) ist.

Analysis Beispiel 4 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1a (4 BE)	Zu zeigen ist: f(-x) = -f(x): Spiegelt man den Graphen von $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$ am Ursprung, so erhält man den Term $-(x \cdot e^{-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{2}}) = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} = -f(x)$. Der Graph besitzt nur eine Nullstelle, da nur der erste Faktor des Produktterms gleich null werden kann; der zweite Faktor ist stets größer als null. Für wachsendes x nähert sich der Graph von oben der x-Achse, d. h., es gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

1b

(2 BE)

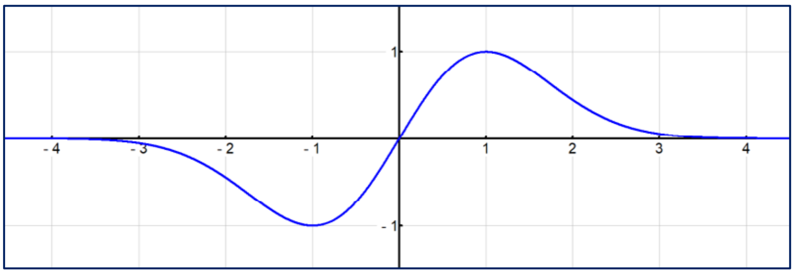
Nach Produkt- und Kettenregel gilt:

$f'(x) = 1\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot 2x) = (1-x^2)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$

1c

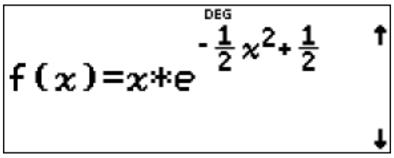
(5 BE)

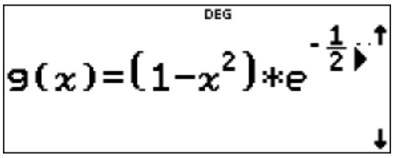
table

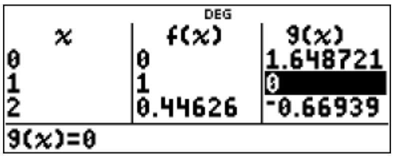


Aus der Produktdarstellung $f'(x) = (1-x)\cdot(1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$ ergeben sich die beiden Nullstellen bei x = -1 und x = +1 und somit die folgenden Monotonieintervalle:

Intervall	Beispiel	Monotonie
x < -1	f‘(-2) ≈ -0,67	streng mon. fallend
-1 < x < +1	f‘(0) = 1,65	streng mon. steigend
x > +1	f‘(2) ≈ -0,67	streng mon. fallend







x	f(x)	g(x)
0	0	1.648721
1	1	0
2	0.44626	-0.66939

g(x)=0

(-1|-1) ist Tiefpunkt, (+1|+1) ist Hochpunkt des Graphen

1d

(3 BE)

Wegen der Kettenregel gilt allgemein: $[e^{g(x)}]' = g'(x)\cdot e^{g(x)}$. Hieraus folgt gemäß Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, dass $e^{g(x)}$ eine Stammfunktion ist für $g'(x)\cdot e^{g(x)}$.

Daher gilt allgemein die folgende Integrationsregel gilt:

$$\int_u^v g'(x)\cdot e^{g(x)}\,dx = [e^{g(x)}]_u^v$$

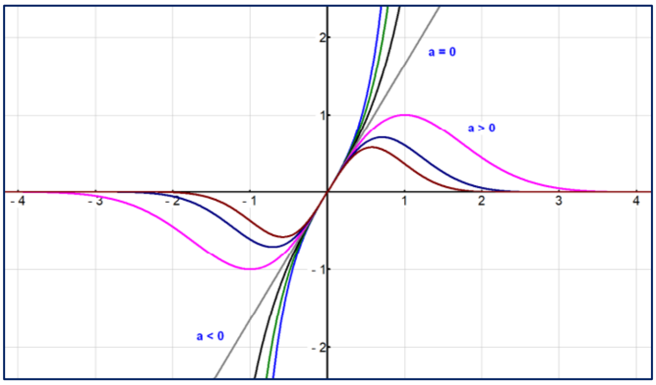
Angewendet auf die Funktion f bedeutet dies:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_0^1 (-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\,dx = -[e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}]_0^1 = -(e^0 - e^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{e}-1$$

1e (3 BE)	Das asymptotische Annähern des Graphen an die x-Achse bedeutet, dass für großes w gilt: $\int_w^\infty f(x)\,dx \approx 0$, also mit Sicherheit auch für die große Zahl w = 2022. Somit folgt für jede Stammfunktion F von f, dass $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^w f(x)\,dx + \int_w^\infty f(x)\,dx \approx \int_0^w f(x)\,dx = F(w) - F(0)$

2a (3 BE)	Für die Schar von Funktionen $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot x^2+\frac{1}{2}}$ gilt: $f_a(1) = e^{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}}$. Die Bedingung $f_a(1) = 1$ ist nur für a = 1 erfüllt, denn: $f_a(1) = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$
2b (2 BE)	Für a = 0 ergibt sich: $f_0(x) = x \cdot e^{\frac{1}{2}}$. Der Graph ist eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $\sqrt{e}$.
2c (3 BE)	Für die Ableitung der Funktionen der Schar gilt: $f_a\,'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot x^2+\frac{1}{2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot x^2+\frac{1}{2}} \cdot (-a \cdot x) = (1 - a \cdot x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot x^2+\frac{1}{2}}$ Aus $f_a(0) = 0$ und $f_a\,'(0) = f_0\,'(0) = \sqrt{e}$ folgt: Alle Graphen der Schar verlaufen durch den Ursprung und haben dort die gleiche Steigung (d. h. eine gemeinsame Tangente). Die Graphen der Schar haben ansonsten keine Punkte gemeinsam (d. h. $f_{a_1}(x) \neq f_{a_2}(x)$ für x $\neq$ 0.
2d (3 BE)	Streckung des Graphen einer Funktion der Funktionenschar mit dem Faktor k in Richtung der x-Achse bedeutet, dass die Variable x durch x/k ersetzt werden muss. Streckung eines Graphen in Richtung der y-Achse bedeutet, dass der Funktionsterm mit k multipliziert werden muss. Wenn beides erfolgen soll, ergibt sich: $k \cdot f_a(\frac{x}{k}) = k \cdot \frac{x}{k} \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot(\frac{x}{k})^2+\frac{1}{2}} = x \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{k^2}\cdot x^2+\frac{1}{2}} = f_{\frac{a}{k^2}}(x)$ Dies ist ebenfalls eine Funktion der Funktionenschar.
2e (3 BE)	Die Extremstellen der Funktionenschar findet man mithilfe der notwendigen Bedingung: $f_a\,'(x) = (1 - a \cdot x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot x^2+\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow a \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{a}$. Extremstellen können also nur vorliegen, wenn a > 0. In diesem Fall sieht der Graph im Prinzip so aus wie der Graph von f (also für a = 1).

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Die folgende Abbildung zeigt die Graphen der Schar für a = -3, a = -2, …, a = +3.



</td>
</tr>
<tr>
<td>

2f

(3 BE)
</td>
<td>
Bestimmen der Extrempunkte im Falle a > 0:

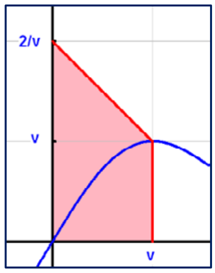
$f_a'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{a} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$

Einsetzen dieser x-Werte in den Funktionsterm:

$f_a(\frac{1}{\sqrt{a}})=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot(\frac{1}{\sqrt{a}})^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot e^0=\frac{1}{\sqrt{a}}$ und $f_a(-\frac{1}{\sqrt{a}})=-\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot(-\frac{1}{\sqrt{a}})^2+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot e^0=-\frac{1}{\sqrt{a}}$

Da x- und y-Koordinate übereinstimmen, bedeutet dies, dass alle Extrempunkte auf der Geraden mit der Gleichung y = x liegen.
</td>
</tr>
<tr>
<td>

2g

(6 BE)
</td>
<td>


Das gefärbte Trapez in der Abbildung rechts hat die Eckpunkte (0|0), (v|0), (v|v) und (0|2/v), wobei (v|v) der Hochpunkt eines Funktionsgraphen der Schar ist.

Der Flächeninhalt eines Trapezes berechnet sich aus dem Produkt der Länge der Mittellinie (= arithmetisches Mittel der Grundlinien) und der Höhe:

$A=\frac{1}{2}\cdot(v+\frac{2}{v})\cdot v=\frac{1}{2}\cdot v^2+1$

Der Flächeninhalt des Trapezes ist gleich 49, wenn gilt

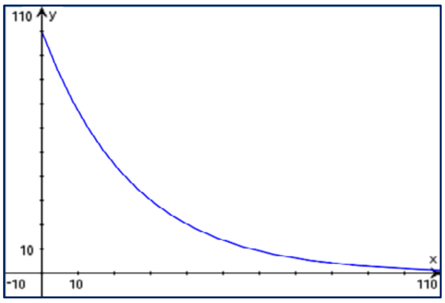
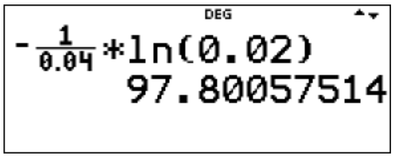
$A=49 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot v^2+1=49 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot v^2=48 \Leftrightarrow v^2=96 \Leftrightarrow v=\sqrt{96}$.

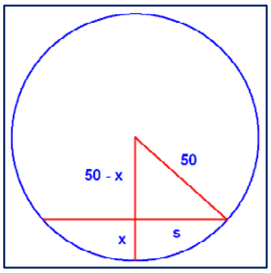
Nach Teilaufgabe f) gilt für die Extremstelle v: $v=\frac{1}{\sqrt{a}}$, also

$\sqrt{96}=\frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow a=\frac{1}{96}$,

d. h., wenn diese Bedingung für den Parameter a erfüllt ist, dann ist der Flächeninhalt des Trapezes gleich 49.
</td>
</tr>
</table>

Analysis Beispiel 5 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1a (4 BE)	Die Füllmenge in einem Behälter wird durch $M(h) = 100 \cdot e^{-0,04 \cdot h}$ beschrieben, wobei h der jeweiligen Füllhöhe (in cm) entspricht. Wenn der Behälter leer ist, also h = 0, dann ist $M(0) = 100$. Wenn $M(h) = 2$, dann gilt $100 \cdot e^{-0,04 \cdot h} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,04 \cdot h} = 0,02 \Leftrightarrow$ $-0,04 \cdot h = \ln(0,02) \Leftrightarrow h = -\frac{1}{0,04} \cdot \ln(0,02) \approx 97,8$  
1b (4 BE)	Wenn die Füllhöhe um 25 cm abnimmt, dann gilt für den Wert von M: $M(h-25) = 100 \cdot e^{-0,04 \cdot (h-25)} = 100 \cdot e^{-0,04 \cdot h+1} = 100 \cdot e^{-0,04 \cdot h} \cdot e^{1} = e \cdot M(h)$, d. h., wenn die Füllhöhe um 25 cm verringert wird, verändert sich M(h) mit dem Faktor e, und dies ist unabhängig von der jeweiligen Füllhöhe h.
1c (5 BE)	Der Logarithmus der Funktion M(h) ist eine lineare Funktion, denn $\ln(100 \cdot e^{-0,04 \cdot h}) = \ln(100) + \ln(e^{-0,04 \cdot h}) = \ln(100) - 0,04 \cdot h$, der Graph davon ist eine Gerade mit Steigung m = – 0,04. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist (0|ln(100)).

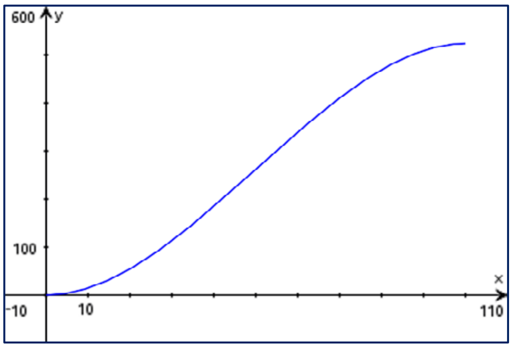
2a (4 BE)	Für einen kugelförmigen Behälter mit Innendurchmesser 100 cm kann das Füllvolumen mithilfe von $V(h) = \frac{1}{1000} \cdot \int_0^h i(x)\,dx$ berechnet werden, wobei $i(x) = \pi \cdot (50^2 - (50-x)^2) = \pi \cdot (100x - x^2)$. Eine Stammfunktion für i(x) ist dabei gegeben durch $I(x) = \pi \cdot (50x^2 - \frac{1}{3}x^3)$
2b (6 BE)	Die Flüssigkeit in der Kugel bildet eine Kugelkappe, deren Radius s sich gemäß dem Satz des Pythagoras wie folgt berechnet: $s^2 = 50^2 - (50-x)^2$. Die Funktion i(x) entspricht daher dem Flächeninhalt der Fläche der Kugelkappe (= Oberfläche der Flüssigkeit). Um das Volumen in Litern (= Kubikdezimeter) angeben zu können, muss das Integral mit dem Faktor 1/1000 multipliziert werden, da der Radius s in Zentimetern angegeben wird. 

2c

(5 BE)

table

Für die Funktion, mit der das Füllvolumen modelliert werden kann, gilt:



$V(h) = \frac{\pi}{1000} \cdot (50h^2 - \frac{1}{3}h^3)$, vgl. Grafik rechts.

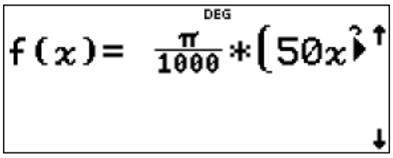
Um den Wendepunkt der Kurve zu ermitteln, muss die 2. Ableitung bestimmt werden:

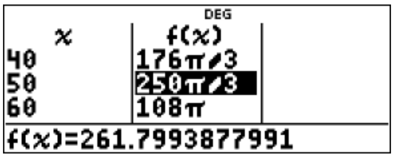
$V'(h) = \frac{\pi}{1000} \cdot (100h - h^2)$ und somit

$V''(h) = \frac{\pi}{1000} \cdot (100 - 2h)$

Die Nullstelle der 2. Ableitung liegt bei h = 50. Das Volumen hierfür beträgt

$V(50) = \frac{\pi}{1000} \cdot \frac{2}{3} \cdot 125000 = \frac{250}{3} \cdot \pi \approx 261{,}8$ Liter.





3a

(2 BE)

Die zeitliche Entwicklung des Füllvolumens kann mithilfe von $V(t) = 150 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}t) + 300$ beschrieben werden.

Da die Werte der Sinusfunktion $\sin(\frac{\pi}{12}t)$ zwischen -1 und +1 schwanken können, liegt das Füllvolumen stets zwischen 150 und 450 Liter.

3b

(6 BE)

Zeitpunkte, an denen ein Füllvolumen von genau 375 Liter vorliegt, berechnen sich wie folgt:

$V(t) = 150 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}t) + 300 = 375 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{12}t) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee \frac{\pi}{12}t = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = 2 + k \cdot 24 \vee t = 10 + k \cdot 24$

Also t = 2, t = 10, t = 26, t = 34, …

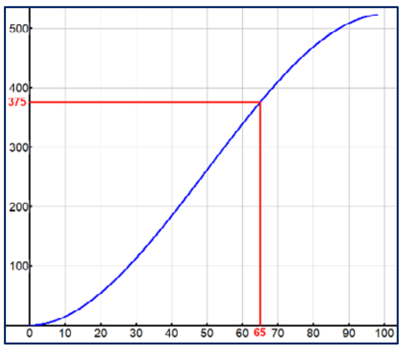
Nur die ersten drei aufgeführten Zeitpunkte liegen innerhalb der ersten halben Stunde.

3c

(4 BE)

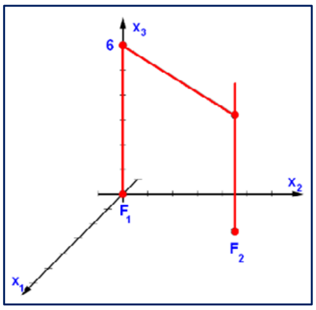
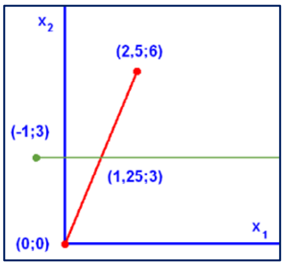
Auch für t = 50 = 2 + 2 · 24 ergibt sich ein Füllvolumen von 375 cm.

Dies entspricht ungefähr einer Füllhöhe von 65 cm, vgl. die Abb. aus Teilaufgabe 2c).



Analytische Geometrie Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)

<table>
<tr><td>a
(3 BE)</td><td>Um nachzuweisen, dass eine Kletterwand mit den Eckpunkten A(6|7|4), B(10|5|5), C(9|5,5|8) und D(5|7,5|7) ein Parallelogramm bilden, müssen die Verbindungsvektoren zweier einander gegenüberliegenden Strecken untersucht werden, beispielsweise
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ 5-7 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 9-5 \\ 5,5-7,5 \\ 8-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$.
Es handelt sich nicht um ein Rechteck, da das Skalarprodukt der Vektoren zweier benachbarter Seiten nicht gleich null ist, die Vektoren also keinen rechten Winkel bilden:
$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5-6 \\ 7,5-7 \\ 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0,5 + 1 \cdot 3 = -4 - 1 + 3 = -2$</td></tr>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td>Gezeigt werden muss, dass ein Normalenvektor der Ebene senkrecht ist zu einem Normalenvektor der x_1x_2-Ebene.
Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene, die durch $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, kann durch das folgende Gleichungssystem bestimmt werden
$\left| \begin{array}{c} 4n_1 - 2n_2 + n_3 = 0 \\ -n_1 + 0,5n_2 + 3n_3 = 0 \end{array} \right|$
Durch Umformungen ergibt sich:
$\left| \begin{array}{c} 4n_1 - 2n_2 + n_3 = 0 \\ -4n_1 + 2n_2 + 12n_3 = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 4n_1 - 2n_2 + n_3 = 0 \\ 13n_3 = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 4n_1 - 2n_2 = 0 \\ n_3 = 0 \end{array} \right|$
Ein Normalenvektor ist beispielsweise $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Da die dritte Komponente des Normalvektors gleich null ist, ist der Normalenvektor parallel zur x_1x_2-Ebene ausgerichtet, also senkrecht zu einem Normalenvektor der x_1x_2-Ebene.</td></tr>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td>Eine Verbindungslinie zwischen den (einander gegenüberliegenden) Punkten D und B, also eine Diagonale im Parallelogramm ABCD würde dieses halbieren. Aus dem Vergleich der dritten Komponenten der Punkte D und B folgt: Der Punkt D liegt oberhalb des Punkts B; daher verläuft eine horizontale Linie durch D oberhalb dieser Diagonale. Der obere Teil des Parallelogramms ist also kleiner als der untere Teil.</td></tr>
</table>

d (3 BE)	Darstellung der beiden Masten mit den Fußpunkten $F_1(0\|0\|0)$ und $F_2(2{,}5\|6\|0)$ sowie der Verbindung durch ein Seil, das in 6m Höhe bzw. 4,7 m Höhe an den Masten befestigt ist. 
e (3 BE)	Der Höhenunterschied der Befestigungspunkte auf den Masten beträgt 1,3 m. Der Abstand zwischen den beiden Masten (beispielsweise gemessen zwischen den Fußpunkten) beträgt $\sqrt{(2{,}5-0)^2+(6-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{42{,}25}=6{,}5$ m. Die Neigung beträgt daher $\frac{1{,}3}{6{,}5}=0{,}2=20\,\%$.
f (5 BE)	Das untere Seil kann durch eine Gerade g beschrieben werden, deren Parameterdarstellung sich aus den Befestigungspunkten (0|0|6) und (2,5|6|4,7) ergibt: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2{,}5-0\\6-0\\4{,}7-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2{,}5\\6\\-1{,}3\end{pmatrix}$ Das zweite Seil mit $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\\8\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$ verläuft horizontal parallel zur x_1-Achse. Die beiden Punkte, die auf den beiden Seilen vertikal übereinander liegen, haben die x_2-Koordinate 3, d. h., es gilt 6r = 3, also r = ½. Der unten liegende Punkt hat daher die Koordinaten (1,25|3|5,35), der obere die Koordinaten (1,25|3|8). Der Abstand der beiden Punkte beträgt also 8 – 5,35 = 2,65 m. 

Analytische Geometrie Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)

a (3 BE)	Die Ebene L durch die Punkte C(8|8|0), G(4|8|6) und F(8|4|6) kann beschrieben werden durch die folgende Parameterdarstellung: $L:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4-8\\8-8\\6-0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}8-8\\4-8\\6-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-4r\\8-4s\\6r+6s\end{pmatrix}$

<table>
<tr><td></td><td>

Die Punktprobe für den Punkt S(4|4|12) zeigt, dass S in L liegt (das zugehörige lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar):

$$\begin{pmatrix} 8-4r \\ 8-4s \\ 6r+6s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 8-4r=4 \\ 8-4s=4 \\ 6r+6s=12 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} r=1 \\ s=1 \\ r+s=2 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} r=1 \\ s=1 \end{matrix} \right|$$

</td></tr>
<tr><td>

b

(2 BE)

</td><td>

Um zu beweisen, dass das Viereck CGSF eine Raute ist, müssen die Verbindungsvektoren von zwei einander gegenüberliegenden Seiten betrachtet werden, beispielsweise für C(8|8|0), G(4|8|6) und F(8|4|6), S(4|4|12):

$$\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 4-8 \\ 8-8 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} 4-8 \\ 4-4 \\ 12-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichheit der beiden Vektoren folgt die Parallelität der beiden Seiten CG und FS. Der Nachweis, dass auch die zu CF und GS gehören Vektoren gleich sind, kann durch Rechnung erfolgen

$$\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 4-8 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{GS} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 4-8 \\ 12-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

oder auch mithilfe einer Vektorkette $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GS}$.

</td></tr>
<tr><td>

c

(2 BE)

</td><td>

Die Ebene M_1: $x_1 = 8$ verläuft durch die Punkte B, C und F, enthält also nur eine der Giebelflächen.

Die Ebene M_2: $x_1 - x_2 = 0$ verläuft durch die Punkte A, C und S, enthält daher eine der Symmetrieebenen des Kirchendachs.

Die Ebene M_3: $x_3 = 6$ verläuft durch die Punkte E, F, G und H, bildet also eine Schnittfläche parallel zur Grundfläche.

</td></tr>
<tr><td>

d

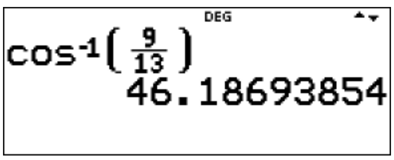
(6 BE)

cos cos⁻¹

</td><td>

Der Winkel zwischen den Seiten SF und SG ergibt sich mithilfe der Kosinusfunktion:

$$\cos\varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{52}} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13} \Leftrightarrow \varphi \approx 46{,}2°.$$

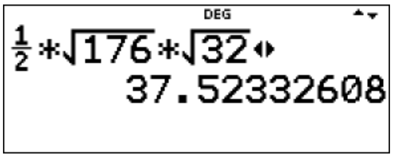
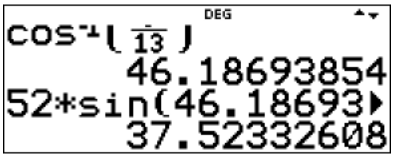


Der Flächeninhalt einer Raute kann mithilfe der Diagonalen berechnet werden (A = ½ · e · f), wobei für die Diagonalen gilt

$$e = \left|\overrightarrow{SC}\right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{176} \text{ und } f = \left|\overrightarrow{FG}\right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{32}, \text{ also}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{176}\cdot\sqrt{32} \approx 37{,}5.$$

</td></tr>
</table>

	Alternativ kann man die Höhe h auf FS durch G betrachten mit $h = \lvert SF \rvert \cdot \sin\varphi$, also $A = \lvert SF \rvert \cdot h = \sqrt{52} \cdot \sqrt{52} \cdot \sin\varphi \approx 37{,}5$. Die gesamte Dachfläche ist 4-mal so groß, also ca. 150 m². 
e (3 BE)	Da die x_3-Koordinate von S doppelt so groß ist wie die der Punkte F und G und die Verbindungsgerade zwischen F und G parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft, schneiden die Geraden durch S und F bzw. durch S und G die x_1x_2-Ebene in Punkten, deren Abstand – gemäß Strahlensatz – doppelt so groß ist wie der von F und G.
f (4 BE)	Zunächst muss der Mittelpunkt N(4|4|6) von EG bestimmt werden. Dann muss für den zu bestimmenden Punkt R auf SF gelten, dass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{NR}$ orthogonal ist zu $\overrightarrow{SF}$.
	Zusatz (konkrete Bestimmung des Punkts): $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} 4+4r \\ 4 \\ 12-6r \end{pmatrix}$, also $\overrightarrow{NR} = \begin{pmatrix} 4+4r \\ 4 \\ 12-6r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4r \\ 0 \\ 6-6r \end{pmatrix}$ und weiter $\overrightarrow{NR} * \overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} 4r \\ 0 \\ 6-6r \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 16r - 36 + 36r = 0 \Leftrightarrow 52r = 36 \Leftrightarrow r = \frac{9}{13}$ Einsetzen von r in die o. a. Vektorgleichung ergibt $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4+4\cdot\frac{9}{13} \\ 4 \\ 12-6\cdot\frac{9}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{88}{13} \\ 4 \\ \frac{102}{13} \end{pmatrix}$, also $R(\frac{88}{13} \mid 4 \mid \frac{102}{13})$.

Analytische Geometrie Beispiel 3 (erhöhtes Anforderungsniveau)

a (2 BE)	Aus den Koordinaten der Punkte A(0|0|0), B(4|0|0), C(0|4|0), D_k(0|0|k) ergibt sich: Die beiden Dreiecke ABD_k und ACD_k sind zueinander kongruent, da sie in den beiden Katheten und dem rechten Winkel übereinstimmen. Daher sind auch die beiden Hypotenusen dieser beiden Dreiecke (= Schenkel im Dreieck BCD_k) gleich lang, d. h., das Dreieck BCD_k ist gleichschenklig. Alternativ ist auch eine Berechnung der Seitenlängen möglich:

<table>
<tr><td></td><td>

$\left|\overrightarrow{BD_k}\right| = \left|\begin{pmatrix}0-4\\0-0\\k-0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\k\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+k^2}$, $\left|\overrightarrow{CD_k}\right| = \left|\begin{pmatrix}0-0\\0-4\\k-0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-4\\k\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+k^2}$.

</td></tr>
<tr><td>

b

(3 BE)

</td><td>

Da das Dreieck BCD_k gleichschenklig ist, stimmen Mittelsenkrechte und Höhe überein; es genügt also, die Länge der Strecke MD_k zu bestimmen:

$\left|\overrightarrow{MD_k}\right| = \left|\begin{pmatrix}0-2\\0-2\\k-0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\k\end{pmatrix}\right| = \sqrt{8+k^2}$. Mit $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}0-4\\4-0\\0-0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{32}$

ergibt sich für den Flächeninhalt A des Dreiecks: $A = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{8+k^2}$

</td></tr>
<tr><td>

c

(4 BE)

</td><td>

Die Koordinaten der Punkte B(4|0|0), C(0|4|0), D_k(0|0|k) müssen die allgemeine Gleichung einer Ebene $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ erfüllen.

Einsetzen der Koordinaten ergibt die Gleichungen 4a = d, 4b = d, kc = d.

Wählt man beispielsweise d = 4, dann folgt a = 1, b = 1, c = 4/k.

Eine Koordinatengleichung der Ebene L_k ist also $x_1 + x_2 + \frac{4}{k}x_3 = 4$.

Alternative Lösung:

Da die gesuchte Ebene orthogonal ist zu $\overrightarrow{MD_k} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\k\end{pmatrix}$ und zu $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$,

ergeben sich hieraus die Komponenten eines Normalenvektors der Ebene:

$\overrightarrow{BC} * \vec{n} = -4n_1 + 4n_2 = 0$ und $\overrightarrow{MD_k} * \vec{n} = -2n_1 - 2n_2 + kn_3 = 0$. Wählt man beispielsweise $n_1 = 1$ und $n_2 = 1$, dann folgt die Bedingung $k\cdot n_3 = 4$.

</td></tr>
<tr><td>

d

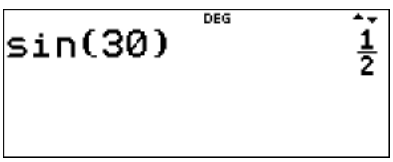
(5 BE)

</td><td>

Der Winkel zwischen der Ebene L_k und der x_3-Achse kann mithilfe des Sinus bestimmt werden. Wegen sin(30°) = 0,5 ist daher die folgende Gleichung zu lösen:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\1\\\frac{4}{k}\end{pmatrix}\right|}{1\cdot\sqrt{2+\frac{16}{k^2}}} = \frac{\frac{4}{k}}{\sqrt{2+\frac{16}{k^2}}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{8}{k} = \sqrt{2+\frac{16}{k^2}} \Leftrightarrow 64 = k^2\cdot(2+\frac{16}{k^2})$$

$$\Leftrightarrow 64 = 2k^2 + 16 \Leftrightarrow k^2 = 24 \Leftrightarrow k = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$



</td></tr>
<tr><td>

e

(3 BE)

</td><td>

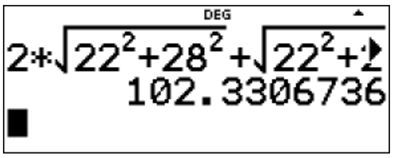
Der Punkt P(1|0|3) liegt in der Ebene, wenn $1+0+\frac{12}{k} = 4 \Leftrightarrow \frac{12}{k} = 3 \Leftrightarrow k = 4$.

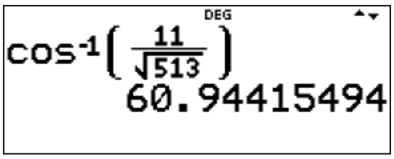
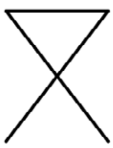
Die gleiche Bedingung ergibt sich für R(0|1|3).

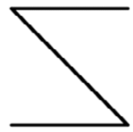
</td></tr>
</table>

f (4 BE)	Für k = 6 liegt der Eckpunkt Q(1|1|3) in der Ebene, für größere Werte wird der Quader nicht geschnitten. Für k-Werte zwischen 6 und 4 (vgl. Teilaufgabe e)) wird der Quader in drei Punkten geschnitten. Die Ebene verläuft genau durch den Eckpunkt (0|0|3), wenn $0+0+\frac{12}{k}=4 \Leftrightarrow \frac{12}{k}=4 \Leftrightarrow k=3$. Für kleinere Werte von k gibt es vier Schnittpunkte; für Werte von k, die zwischen 3 und 4 liegen, gibt es fünf Schnittpunkte. Zusammenfassung: 4 ≤ k < 6: drei Schnittpunkte, 3 < k < 4: fünf Schnittpunkte, 0 < k ≤ 3: vier Schnittpunkte.
g (4 BE)	Der Punkt Q_h liegt auf der Mittelsenkrechten MD_6, seine Koordinaten erfüllen also die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2r\\2r\\6-6r\end{pmatrix}$ mit 0 ≤ r ≤ 1. Da die Quaderhöhe in der Aufgabenstellung mit h bezeichnet wird, ergibt sich für den Parameter r $h=6-6r \Leftrightarrow r=\frac{6-h}{6}=1-\frac{h}{6}$ und hieraus die Koordinaten $x_1=x_2=2r=2-\frac{h}{3}$.

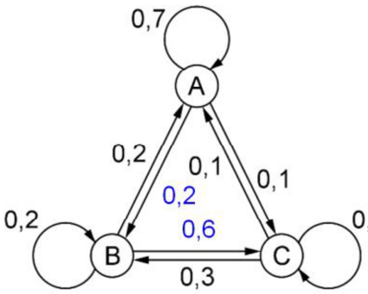
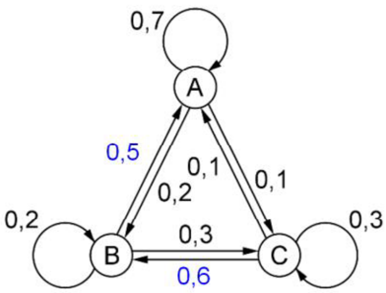
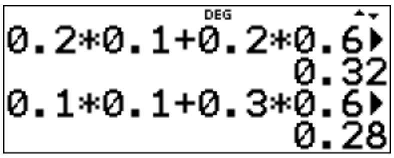
Analytische Geometrie Beispiel 4 (erhöhtes Anforderungsniveau)

a (2 BE)	Da sich die Koordinaten der Punkte B(-11|11|28) und C(11|-11|28) nur im Vorzeichen der 2. und 3. Koordinate unterscheiden, liegen diese symmetrisch bzgl. der x_3-Achse.
b (3 BE)	$\left\|\overline{AB}\right\|+\left\|\overline{BC}\right\|+\left\|\overline{CD}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix}22\\-22\\0\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix}-22\\0\\-28\end{pmatrix}\right\|=2\cdot\sqrt{22^2+28^2}+\sqrt{22^2+22^2}\approx 102{,}3$ 
c (4 BE)	Die Ebene E wird durch die Punkte A(11|11|0), B(-11|11|28) und C(11|-11|28) bestimmt. Eine Koordinatengleichung der Ebene kann mithilfe des Ansatzes $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ bestimmt werden; wegen der auftretenden Koordinaten ist es naheliegend, für d den Wert 11 · 28 = 308 zu wählen:

	$\left\lvert\begin{array}{c} 11a+11b=308 \\ -11a+11b+28c=308 \\ 11a-11b+28c=308 \end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c} 11a+11b=308 \\ 22b+28c=616 \\ 56c=616 \end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c} a=14 \\ b=14 \\ c=11 \end{array}\right\rvert$, also $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$. Alternativ kann man auch einen Normalenvektor zu $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ 28 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix}$ suchen. Da Komponenten auftreten, die gleich null sind, findet man unmittelbar einen geeigneten Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$ und durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes die Gleichung: $\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = 308$.
d (5 BE)	Der Schnittwinkel zweier Ebenen ist gleich dem Schnittwinkel der zugehörigen Normalenvektoren, also hier $\cos\varphi = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rvert}{1 \cdot \sqrt{14^2+14^2+11^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{513}} \Leftrightarrow \varphi \approx 60{,}94°$  Wegen der symmetrischen Anordnung der Ebenen E und F im Quader ergibt sich für den Winkel zwischen E und F der Winkel $180° - 2\varphi \approx 58{,}1°$.
e (3 BE)	Da das Volumen einer Pyramide mithilfe der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ berechnet wird, und die Grundfläche G gleich der halben Grundfläche des Quaders ist und die Höhe gleich der des Quaders ist, ergibt sich, dass der betrachtete pyramidenförmige Teilkörper ein Volumen hat, das einem Sechstel des Quadervolumens entspricht.
f (4 BE)	 Der ersten Abbildung liegt eine Blickrichtung zugrunde, die der negativen x_2-Achse entspricht, also $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; die zweite Abbildung  entspricht der Blickrichtung des Vektors $\overrightarrow{BC} = 22 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

	Die Abb. rechts zeigt das Denkmal von oben. 
g (4 BE)	Die in der Aufgabenstellung angegebenen Gleichungen beschreiben die folgenden Eigenschaften: (I) Q liegt auf der Gerade durch A und B, wegen t $\in$ [0;1] sogar auf der Strecke AB, also innerhalb des Quaders, (II) Die Gerade durch P und Q verläuft orthogonal zur Geraden durch A und B, (III) Der Abstand von P zu AB muss mit dem Abstand von Q zu BC übereinstimmen.

Lineare Algebra & Analytische Geometrie Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)

a (2 BE)	Die ergänzten Diagramme sehen wie folgt aus:   Das Diagramm rechts entspricht der Übergangsmatrix $M=\begin{pmatrix}0,7 & 0,5 & 0,1\\ 0,2 & 0,2 & 0,6\\ 0,1 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}$.
b (2 BE)	$\begin{pmatrix}0,7 & 0,5 & 0,1\\ 0,2 & 0,2 & 0,6\\ 0,1 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\frac{20}{150}\\ \frac{60}{150}\\ \frac{70}{150}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{51}{150}\\ \frac{58}{150}\\ \frac{41}{150}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0,34\\ 0,387\\ 0,273\end{pmatrix}$ Am Standort A werden 34 % der Fahrzeuge sein. (Im Rechenansatz wurde direkt der Zustandsvektor mit relativen Häufigkeiten verwendet.)
c (4 BE)	In der Gleichung $\begin{pmatrix}0 & 0,5 & 0,1\\ 0,2 & 0 & 0,6\\ 0,1 & 0,3 & 0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}20\\ 60\\ 70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}$ sind die Fahrzeuge nicht erfasst worden, die ihren Standort nicht gewechselt haben. Die Summe der Komponenten des rechts stehenden Zustandsvektors gibt also die Anzahl der Fahrzeuge an, die im Laufe des Montags den Standort wechseln.
d (2 BE)	Es gilt $M^2=\begin{pmatrix}0,7 & 0,5 & 0,1\\ 0,2 & 0,2 & 0,6\\ 0,1 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0,7 & 0,5 & 0,1\\ 0,2 & 0,2 & 0,6\\ 0,1 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,60 & 0,48 & 0,40\\ 0,24 & 0,32 & 0,32\\ 0,16 & 0,20 & 0,28\end{pmatrix}$ 
e (5 BE)	**Aussage A_1:** Berechnung der Anzahl der Fahrzeuge, wenn am Dienstag Abend alle 150 Fahrzeuge am Standort B sind, dann berechnet sich der Anteil der Fahrzeuge am Donnerstag Abend wie folgt:

	$M^2 \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}48 & 0{,}40 \\ 0{,}24 & 0{,}32 & 0{,}32 \\ 0{,}16 & 0{,}20 & 0{,}28 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}48 \\ 0{,}32 \\ 0{,}20 \end{pmatrix}$, d.h., 32 % aller Fahrzeuge sind am Standort B. **Aussage A_2:** Berechnung der Anzahl der Fahrzeuge, wenn am Dienstag Abend kein Fahrzeug am Standort C ist, dann berechnet sich der Anteil der Fahrzeuge am Donnerstag Abend wie folgt: $M^2 \circ \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}48 & 0{,}40 \\ 0{,}24 & 0{,}32 & 0{,}32 \\ 0{,}16 & 0{,}20 & 0{,}28 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}48+0{,}12a \\ 0{,}32-0{,}08a \\ 0{,}20-0{,}04a \end{pmatrix}$, wobei 0 ≤ a ≤ 1. Der Anteil der Fahrzeuge am Standort B liegt daher zwischen 24 % (= 0,32 – 0,08 · 1) und 32 % (= 0,32 – 0,08 · 0).
f (5 BE)	Wenn am Sonntag Abend an den drei Standorten a, b, c Fahrzeuge stehen, dann werden am Dienstag Abend voraussichtlich $M^2 \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Fahrzeuge an den drei Standorten sein. Hiervon müssen in der ersten Komponente drei Fahrzeuge herausgenommen werden und 90 % der Fahrzeuge von Standort B. Dies kann wie folgt beschrieben werden: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \left[M^2 \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$. Um den Zustand am Freitag Abend zu erhalten, muss der zuletzt erhaltene Vektor mit M³ multipliziert werden: $M^3 \circ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \left[M^2 \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\}$.

Lineare Algebra & Analytische Geometrie Beispiel 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1a (2 BE)	Zu zeigen ist: Das Dreieck mit den Eckpunkten B(-3|4|35), C(0|0|40), D(3|-4|35) ist rechtwinklig mit einem rechten Winkel bei C: $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}(-3)-0\\4-0\\35-40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}, \overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}3-0\\(-4)-0\\35-40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-5\end{pmatrix}, \overrightarrow{CB}*\overrightarrow{CD}=-9-16+25=0$ Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich null ist, bilden die Seiten CB und CD einen rechten Winkel.
1b (2 BE)	Den vierten Punkt des Quadrats erhält man, indem man den Vektor $\overrightarrow{CB}$ zum Ortsvektor von D addiert: $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}3\\-4\\35\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\30\end{pmatrix}$
1c (5 BE)	(*Nachweis nicht verlangt*:) Das Dreieck mit den Eckpunkten B(-3|4|35), D(3|-4|35), S_k(8|6|k) ist gleichschenklig mit Basis BD, denn $\left\|\overrightarrow{BS_k}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}8-(-3)\\6-4\\k-35\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}11\\2\\k-35\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{11^2+2^2+(k-35)^2}=\sqrt{1350-70k+k^2}$, $\left\|\overrightarrow{DS_k}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}8-3\\6-(-4)\\k-35\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}5\\10\\k-35\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{5^2+10^2+(k-35)^2}=\sqrt{1350-70k+k^2}$. Gesucht ist nun derjenige Wert von k, für den das Dreieck mit den Eckpunkten B(-3|4|35), C(0|0|40), S_k(8|6|k) gleichschenklig mit Basis BC ist: $\left\|\overrightarrow{CS_k}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}8-0\\6-0\\k-40\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}8\\6\\k-40\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{8^2+6^2+(k-40)^2}=\sqrt{1700-80k+k^2}$ Gleichheit liegt vor, wenn $1700-80k+k^2=1350-70k+k^2 \Leftrightarrow 350=10k \Leftrightarrow k=35$. Da für k = 35 die Seiten BS_k, CS_k und DS_k gleich lang sind, ist auch das Dreieck CDS_k gleichschenklig.

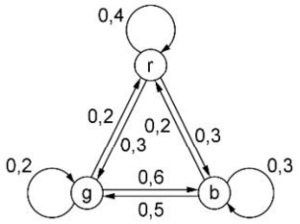
<table>
<tr>
<td>

2a

(3 BE)

</td>
<td>

Zur Übergangsmatrix $M=\begin{pmatrix}0.4 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\\ 0,3 & 0,6 & 0,3\end{pmatrix}$ gehört das Übergangsdiagramm



</td>
</tr>
<tr>
<td>

2b

(5 BE)

</td>
<td>

Gesucht sind die Komponenten des Zustandsvektors, für den die folgende Gleichung erfüllt ist:

$\begin{pmatrix}0.4 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\\ 0,3 & 0,6 & 0,3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}r\\ g\\ 1000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1500\\ 1500\\ 1500\end{pmatrix}$, also das lineare Gleichungssystem

$$\left|\begin{matrix}0,4r+0,2g+200=1500\\ 0,3r+0,2g+500=1500\\ 0,3r+0,6g+300=1500\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}0,4r+0,2g=1300\\ 0,3r+0,2g=1000\\ 0,3r+0,6g=1200\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}0,4r+0,2g=1300\\ 0,1r=300\\ 0,4g=200\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}r=3000\\ g=500\end{matrix}\right|$$

Das Verhältnis der rot leuchtenden zu den grün leuchtenden Lampen beträgt demnach 3000 : 500 = 6 : 1.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

2c

(3 BE)

</td>
<td>

Betrachtet werden Übergangsmatrizen der Form $F_a=\begin{pmatrix}a & a & 0\\ a & a & 0\\ 1-2a & 1-2a & 1\end{pmatrix}$ mit

Potenzen der Form $F_a^{\ k}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot(2a)^k & \frac{1}{2}\cdot(2a)^k & 0\\ \frac{1}{2}\cdot(2a)^k & \frac{1}{2}\cdot(2a)^k & 0\\ 1-(2a)^k & 1-(2a)^k & 1\end{pmatrix}$.

Wenn a > ½ wächst $(2a)^k$ für $k\to+\infty$ über alle Grenzen. Für a = ½ gilt für alle k, dass $(2a)^k = 1$. Für a < ½ konvergiert $(2a)^k$ gegen null.

Daher nähert sich nur a ≤ ½ die Übergangsmatrix einer Grenzmatrix mit endlichen Koeffizienten.

Genauer (hier nicht verlangt):

Für a = ½ konvergiert gegen $F_{1/2}^{\infty}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

für a ≤ ½ gegen $F_a^{\infty}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

</td>
</tr>
</table>

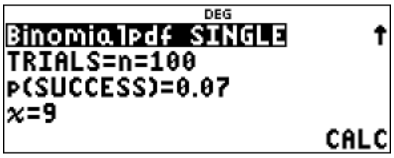
2d (5 BE)	Für a = 0 leuchten alle Lampen nach dem ersten Farbwechsel blau. Für 0 < a < ½ gilt: Lampen, die irgendwann blau leuchten, behalten diese Farbe bei. Lampen, die irgendwann rot bzw. grün leuchten, wechseln mit einem gleichen aber stets kleiner werdenden Anteil im nächsten Schritt zu grün bzw. rot oder behalten die Farbe bei; zunehmend wechseln diese Lampen jedoch zu blau. Für a = ½ gilt: Nur Lampen, die anfangs blau leuchten, behalten diese Farbe bei. Von den rot leuchtenden Lampen wechselt die Hälfte zu grün, die andere Hälfte bleibt rot; entsprechendes gilt auch für die grün leuchtenden Lampen.

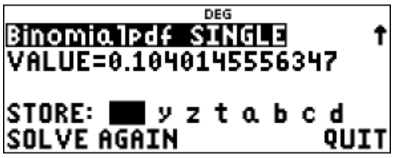
Stochastik Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)

<table>
<tr>
<td>a
(3 BE)
data</td>
<td>

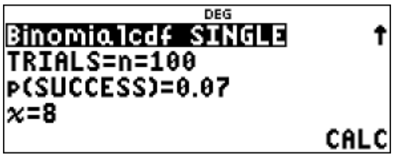
Die binomialverteilte Zufallsgröße X: *Anzahl der Pakete mit Ziel B* hat die Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,07. Die Anzahl der Stufen ist n = 100. Dann gilt:

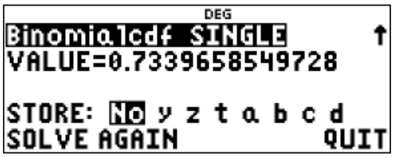
P(X = 9) ≈ 0,104





P(X < 9) = P(X ≤ 8) ≈ 0,734

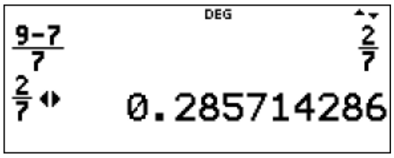




</td>
</tr>
<tr>
<td>b
(3 BE)</td>
<td>

Der Erwartungswert der Anzahl der Pakete mit Ziel B ist m = 100 · 0,07 = 7.

Wenn in der Stichprobe X = 9 das Ziel B haben, dann weicht dies um ca. 28,6 % vom Erwartungswert ab.

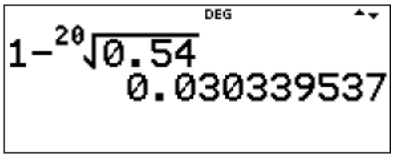


</td>
</tr>
<tr>
<td>c
(3 BE)</td>
<td>

Die Wahrscheinlichkeit, dass keines von 20 zufällig ausgewählten Paketen das Ziel C hat, beträgt $(1 - c)^{20}$. Als Wahrscheinlichkeit ist ein Wert von ca. 54 % angegeben. Hieraus folgt:

$(1-c)^{20} \approx 0{,}54 \Leftrightarrow 1-c \approx \sqrt[20]{0{,}54}$

$\Leftrightarrow c \approx 1-\sqrt[20]{0{,}54} \approx 0{,}030$



Der gesuchte Anteil von Paketen mit Ziel C beträgt ca. 3 %.

</td>
</tr>
<tr>
<td>d
(2 BE)</td>
<td>

Der Anteil der Pakete mit Ziel A beträgt 10 %.

Eine Wahrscheinlichkeit von $0{,}9^{14}\cdot\sum_{i=0}^{3}\binom{6}{i}\cdot 0{,}1^{i}\cdot 0{,}9^{6-i}$ ergibt sich, wenn bei einer Zufallsauswahl von 20 Paketen die ersten 14 nicht das Ziel A haben und von den übrigen 6 Paketen höchstens 3 das Ziel A (also mindestens 3 nicht das Ziel A).

</td>
</tr>
<tr>
<td>e
(3 BE)</td>
<td>

Mit den Bezeichnungen

S: *Das ausgewählte Paket ist schwer* (eine Masse von mehr als 10 kg) und

Z: *Das ausgewählte Paket hat das Ziel A*

und den Informationen des Aufgabentexts

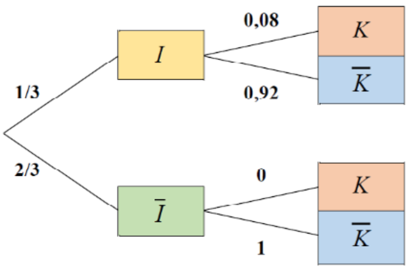
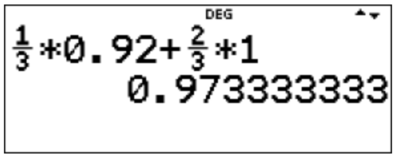
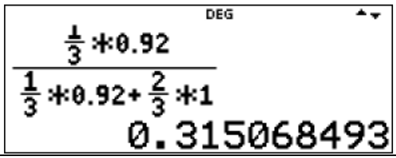
10 % der Pakete haben das Ziel A, *5 % aller Pakete sind schwer* bzw. *von den Paketen mit Ziel A sind 8 % schwer*

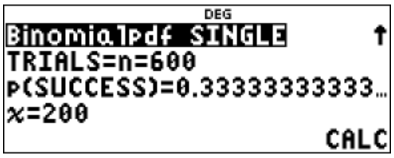
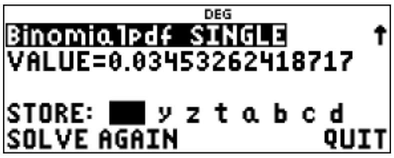
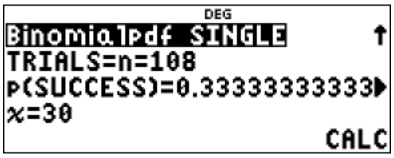
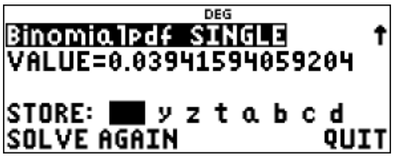
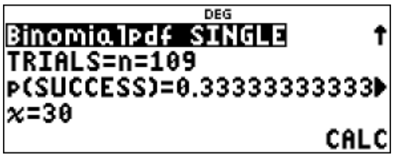
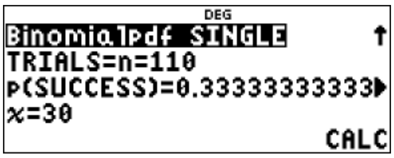
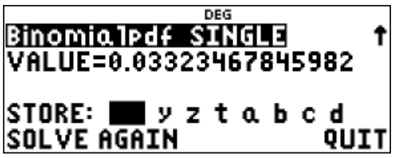
ergibt sich die folgende Vierfeldertafel:

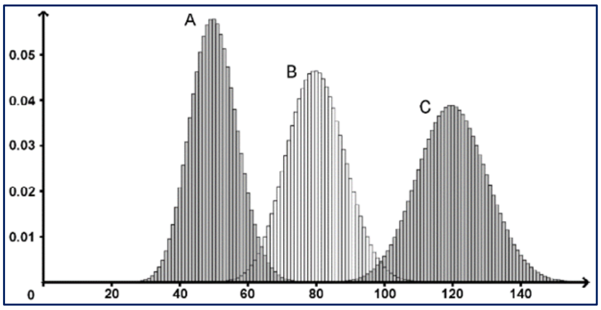
</td>
</tr>
</table>

	Die Informationen des Aufgabentexts sind in Rot eingetragen; die übrigen Anteile ergeben sich durch Differenzbildung: <table><tr><td></td><td>S</td><td>$\overline{S}$</td><td>gesamt</td></tr><tr><td>Z</td><td>0,08 · 0,10 = 0,008</td><td>0,092</td><td>0,10</td></tr><tr><td>$\overline{Z}$</td><td>0,042</td><td>0,858</td><td>0,90</td></tr><tr><td>gesamt</td><td>0,05</td><td>0,95</td><td>1</td></tr></table>
f (3 BE)	Der Anteil der Pakete mit Ziel A (Ereignis *Z*) unter den schweren Paketen (Ereignis *S*) beträgt $P_S(Z) = \frac{P(Z \cap S)}{P(S)} = \frac{0,008}{0,05} = 0,16$ stimmt nicht mit dem Anteil der Pakete mit Ziel A unter den nicht schweren Paketen überein: $P_{\overline{S}}(Z) = \frac{P(Z \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0,092}{0,95} \approx 0,097$. *Hinweis*: Die hier stehende Lösung entspricht der Formulierung der Aufgaben-stellung. Es würde es auch genügen zu zeigen, dass die beiden Ereignisse S und Z nicht stochastisch voneinander unabhängig sind: $P(S) \cdot P(Z) = 0,05 \cdot 0,10 = 0,005 \neq P(S \cap Z) = 0,008$. Dann folgt hieraus, dass alle *bedingten* Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen von den Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse abweichen, also beispielsweise $P_S(Z) \neq P(Z)$.
g (3 BE)	10 % der Pakete haben Ziel A, 7 % haben Ziel B. 8 % der Pakete mit Ziel A sind schwer, 2 % der Pakete mit Ziel B sind schwer. Der Anteil der Pakete mit dem Ziel A *oder* B ist also gleich 17 %, davon sind $\frac{0,10 \cdot 0,08 + 0,07 \cdot 0,02}{0,17} \approx 0,055$ schwer. Demnach ist der Anteil der Pakete, die weder das Ziel A noch das Ziel B haben, kleiner als 5 %.

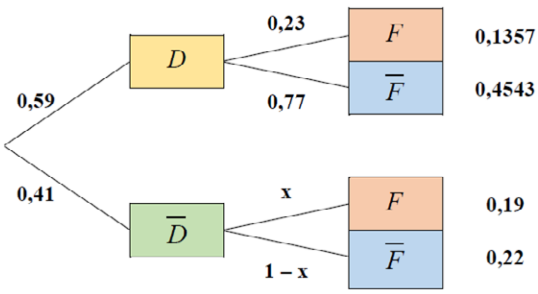
Stochastik Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)

1a (3 BE)	Mit den Bezeichnungen I: *Ein Mensch infiziert sich im Laufe seines Lebens* K: *Bei einem Menschen bricht die Krankheit im Laufe seines Lebens aus* ergibt sich das rechts stehende Baumdiagramm. 
1b (2 BE) data	Mithilfe der Pfadregeln ergibt sich $P(\overline{K}) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}92 + \frac{2}{3} \cdot 1 \approx 0{,}973$ 
1c (3 BE)	Der Anteil aller Personen, bei denen im Laufe ihres Lebens die Krankheit nicht ausbricht, unter den Personen, die sich im Laufe ihres Lebens infiziert haben, beträgt $P_I(\overline{K}) = \frac{P(I \cap \overline{K})}{P(I)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}92}{\frac{1}{3} \cdot 0{,}92 + \frac{2}{3} \cdot 1} \approx 0{,}315$ 

2a (2 BE) data	Die binomialverteilte Zufallsgröße X: *Anzahl der infizierten Menschen* hat die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$. Bei einer Stichprobe vom Umfang n = 600 ergibt sich hieraus der Erwartungswert $\mu = \frac{1}{3} \cdot 600 = 200$. Dann gilt: P(X = 200) ≈ 0,035 
2b (3 BE) data	Durch systematisches Probieren findet man heraus, dass zum Ereignis P(X = 30) ≈ 0,036 am besten der Stichprobenumfang n = 109 passt. 

3a (3 BE)	Die Aussage  *Für die Risikogruppen B und C sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Krankheit bei genau 99 von 1000 infizierten Menschen ausbricht, etwa gleich groß.* ist richtig, denn das Ereignis liegt an der Stelle, wo sich die beiden Histogramme überschneiden und gleiche Wahrscheinlichkeiten aufweisen. Dagegen ist die Aussage *Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Krankheit ausbricht, ist für infizierte Menschen der Risikogruppe C geringer als für infizierte Menschen der beiden anderen Risikogruppen.* falsch, wie man an der Lage des Maximums der Verteilungen (= Erwartungswerte) ablesen kann.
3b (4 BE)	Die Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße berechnet sich gemäß der Formel $V(p) = 1000 \cdot p \cdot (1 - p) = 1000 \cdot (p - p^2)$. Da der Graph eine gestreckte nach unten geöffnete quadratische Parabel ist, liegt deren Maximum bei p = 0,5 mit steigendem Verlauf für 0 < p < 0,5.

Stochastik Beispiel 3 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1a (3 BE)	Der Sachverhalt der Aufgabenstellung kann wie folgt durch ein Baumdiagramm veranschaulicht werden, vgl. rechts.  D: *Die zufällig ausgewählte Person hat Datenschutzbedenken.* F: *Die zufällig ausgewählte Person nutzt ein Fitnessarmband.* Dabei ergibt sich die fehlende Wahrscheinlichkeit aus $P(\overline{D}) \cdot P_{\overline{D}}(F) = 0,41 \cdot x = 0,19 \Leftrightarrow x = \frac{0,19}{0,41} \approx 0,463$
1b (3 BE)	Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_F(D)$ errechnet sich wie folgt: $P_F(D) = \frac{P(F \cap D)}{P(F)} = \frac{0,1357}{0,1357 + 0,19} \approx 0,417$

1c (3 BE)

Die Daten aus dem Baumdiagramm können wie folgt in eine Vierfeldertafel übertragen werden:

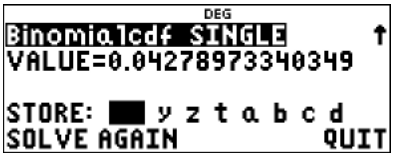
	F	$\overline{F}$	gesamt
D	0,59 · 0,23	0,59 · 0,77	0,59
$\overline{D}$	0,19	0,22	0,41
gesamt	0,3257	0,6743	1

Es gilt also $P_D(F) = 0,23$ und $P(F) = 0,59 \cdot 0,23 + 0,19$, d. h., die Ereignisse D und F sind stochastisch voneinander abhängig.

1d (2 BE) data

Die Zufallsgröße X: *Anzahl der Kunden mit Datenschutzbedenken* ist binomialverteilt mit p = 0,59. Dann ergibt sich für n = 100:

P(X > 50) = 1 – P(X ≤ 50) ≈ 1 – 0,043 = 0,957



1e (3 BE)

Gemäß Bernoulli-Formel müssen im Term $1-\sum_{k=51}^{100}\binom{100}{k}\cdot 0,59^k \cdot a^b$ die Platzhalter a und b durch q = 1 – p = 0,41 und b = 100 – k ersetzt werden.

Gemäß Komplementärregel gilt:

$$1-\sum_{k=51}^{100}\binom{100}{k}\cdot 0,59^k \cdot 0,41^{100-k} = \sum_{k=0}^{50}\binom{100}{k}\cdot 0,59^k \cdot 0,41^{100-k}.$$

Rechts steht die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 50 von 100 Personen Datenschutzbedenken haben.

1f (3 BE)

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen niemand Datenschutzbedenken hat, ist $P(X=0) = 0,41^n$, entsprechend gilt dann für 2n Personen $P(X=0) = 0,41^{2n}$.

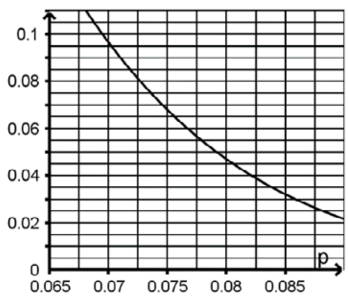
Wenn es ein n geben würde mit $0,41^{2n} = \frac{1}{2}\cdot 0,41^n$, dann müsste auch die Bedingung $0,41^n = \frac{1}{2}$ erfüllbar sein, was aber nicht der Fall ist, da Potenzen von 0,41 stets kleiner sind als 0,5.

2a (5 BE) data

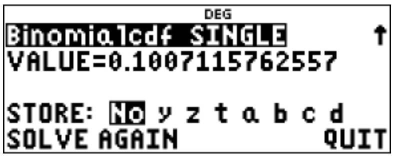
Für die Hypothese H_0: p ≥ 0,07 gilt die Entscheidungsregel:

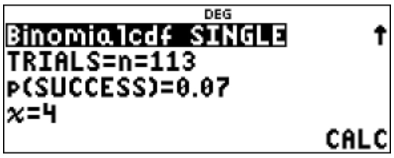
Verwirf H_0, wenn die Anzahl Y der fehlerhaften Armbänder höchstens 4 beträgt.

Aus der Grafik kann man ablesen P(Y ≤ 4) ≈ 0,096.



Durch systematisches Probieren findet man heraus, dass der zugehörige Stichprobenumfang n = 113 betrug:





2b

(3 BE)

data

Im Prinzip kann sowohl die Hypothese H_0: $p \geq 0{,}07$ als auch die Hypothese H_1: $p < 0{,}07$ getestet werden.

Bei einem Fehler 1. Art wird H_0: $p \geq 0{,}07$ irrtümlich verworfen, obwohl die Hypothese richtig ist, aber in der Stichprobe zufällig nur wenige Armbänder fehlerhaft sind. H_1: $p < 0{,}07$ würde irrtümlich verworfen, obwohl die Hypothese richtig ist, aber in der Stichprobe zufällig extrem viele Armbänder fehlerhaft sind.

Im ersten Fall würden im Falle des irrtümlichen Verwerfens der Hypothese unerwartet viele Reklamationen auf den Händler zukommen, was seinem Image als zuverlässiger Händler schaden würde. Das Risiko für einen Fehler 1. Art beträgt hierfür weniger als 10 %. Im zweiten Fall würde er mit vielen Reklamationen rechnen, die aber dann nicht kommen.

Für den Händler wäre ein Imageschaden wichtiger als ein möglicher Ärger mit seiner Lieferfirma.

Nicht verlangt: Die Entscheidungsregel für die Hypothese H_1: $p < 0{,}07$ würde bei einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit von ca. 10 % wie folgt lauten: *Verwirf die Hypothese* H_1: $p < 0{,}07$, *wenn in der Stichprobe vom Umfang n = 113 mehr als 11 fehlerhafte Armbänder sind*. Denn: $P(X > 11) = 1 - P(X \leq 11) \approx 9{,}8\ \%$

Stochastik Beispiel 4 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1a (3 BE)	Aus dem Aufgabentext können die in Rot eingetragenen Anteile übernommen werden; die übrigen ergeben sich durch Differenzbildung.

	Tarif S	Tarif M	Tarif L	gesamt
Hotline-nutzung	0,09	0,275	0,105	0,47
Keine Nutzung	0,11	0,275	0,145	0,53
gesamt	0,20	0,55	0,25	1

1b (2 BE)

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde, der die Hotline noch nicht angerufen hat, Tarif S hat:

$$P_{\overline{H}}(S) = \frac{P(S \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{0,11}{0,53} \approx 0,208 .$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 20,8 %.

1c (2 BE)

Das Ereignis entweder L oder Service-Hotline noch nicht angerufen hat die Wahrscheinlichkeit 0,11 + 0,275 + 0,105 = 0,49.

Die zugehörigen Teilereignisse sind in der Mehrfeldertafel grün unterlegt.

	Tarif S	Tarif M	Tarif L	gesamt
Hotline-nutzung	0,09	0,275	0,105	0,47
Keine Nutzung	0,11	0,275	0,145	0,53
gesamt	0,20	0,55	0,25	1

1d (3 BE)

Vorausgesetzt wird, dass die Anzahl der Kunden, die Tarif S gewählt haben, binomialverteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p_1 = 0,2$ ist.

Die Erfolgswahrscheinlichkeit dafür, dass Kunden sich für die anderen beiden Tarife entschieden haben, ist daher $p_2 = 0,8$.

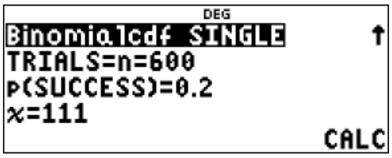
Der Term $\sum_{i=470}^{490} \binom{600}{i} \cdot 0,8^i \cdot 0,2^{600-i}$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an,

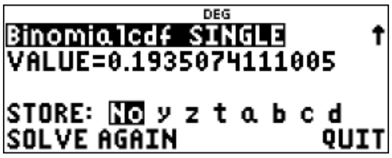
dass mindestens 470 und höchstens 490 der befragten Kunden sich für einen der

<table>
<tr><td></td><td>Tarife M bzw. L entschieden haben, also mindestens 110 und höchstens 130 für Tarif S.</td></tr>
<tr><td>1e
(4 BE)
data</td><td>
Durch systematisches Probieren findet man heraus:

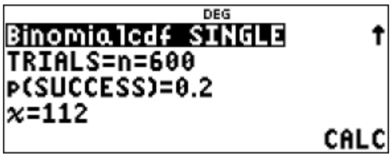
Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den Befragten weniger als k = 113 Kunden den Tarif S haben, ist kleiner als 25 %:

P(X ≤ 111) = P(X < 112) ≈ 19,4 %

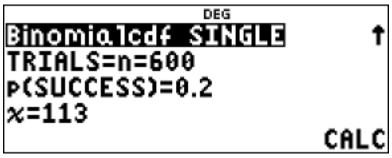


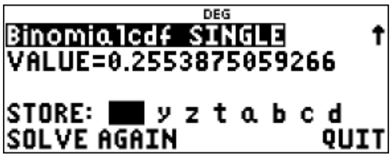


P(X ≤ 112) = P(X < 113) ≈ 22,3 %



P(X ≤ 113) = P(X < 112) ≈ 25,5 %





</td></tr>
</table>

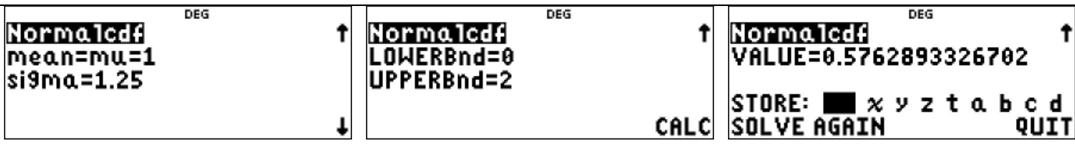
<table>
<tr><td>2
(3 BE)</td><td>
Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus drei Ziffern eine 6-stellige Zahl zu erzeugen, wobei eine der drei Ziffern 4-mal auftritt.

Es gibt 3 Möglichkeiten, die Ziffer auszuwählen, die 4-fach auftritt. Für diese 4 Stellen gibt es $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ Möglichkeiten der Auswahl. Schließlich gibt es noch 2 Möglichkeiten, die verbleibenden beiden Stellen durch die einzeln auftretenden Ziffern zu besetzen, also insgesamt: 3 · 15 · 2 = 90 Möglichkeiten.
</td></tr>
</table>

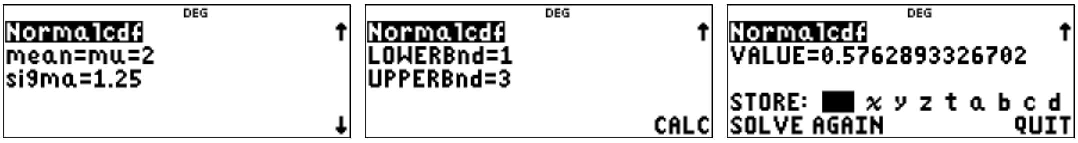
<table>
<tr><td>3a
(4 BE)
data</td><td>
Da bei normalverteilten Zufallsgrößen symmetrische Intervalle um den Erwartungswert jeweils die größtmögliche Wahrscheinlichkeit haben, wird zunächst einmal untersucht, wie groß die Wahrscheinlichkeit für ein solches Intervall ist.

Untersuchungen für verschiedene Werte von μ zeigen, dass es kein Intervall gibt, für das die Wahrscheinlichkeit größer als 60 % ist, da die Wahrscheinlichkeit für ein symmetrisches Intervall mit fester Länge (hier: 2) und fester Standardabweichung (hier: 1,25) stets gleich bleibt.

Beispiel 1: $P_{1\,;\,1{,}25}(0 \le X \le 2) \approx 0{,}576$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>


</td></tr>
<tr><td></td><td>
Beispiel 2: $P_{2\,;\,1,25}(1 \le X \le 3) \approx 0,576$



</td></tr>
<tr><td>

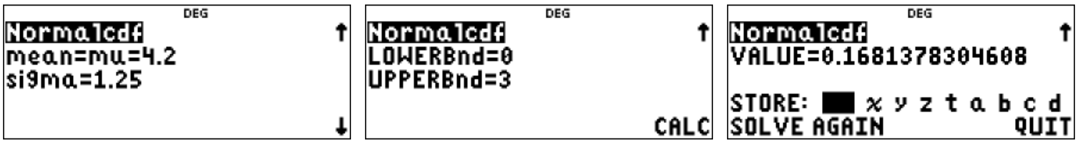
3b

(4 BE)

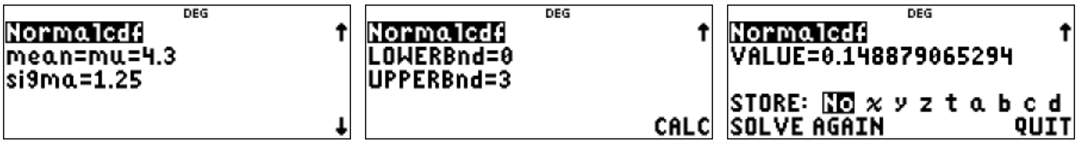
data

</td><td>
Durch systematisches Probieren findet man heraus, dass für den zugrundeliegenden Erwartungswert gilt: $\mu \approx 4,3$.

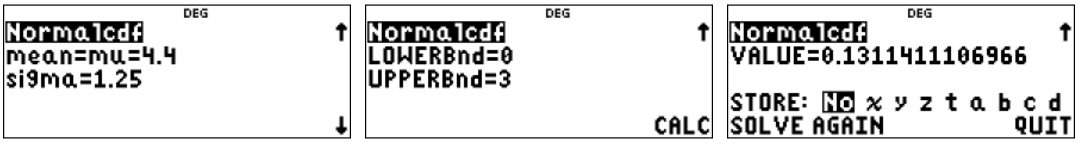
$P_{4,2\,;\,1,25}(X \le 3) \approx 0,168$



$P_{4,3\,;\,1,25}(X \le 3) \approx 0,149$



$P_{4,4\,;\,1,25}(X \le 3) \approx 0,131$



</td></tr>
</table>

Nutzung der Tasten des TI-30X Plus MathPrint™ und deren Funktionalitäten (Auswahl)

Taste	Funktionalität
2nd	Zweitbelegung einer Taste wird aufgerufen
mode	Festlegung des Modus: u. a. in Grad (DEG) oder Bogenmaß (RAD), Festlegen der Zahlennotation, Festlegen des Zahlensystems, Auf dem Display sind zwei Darstellungsformen möglich: CLASSIC (Zeichen nebeneinander) oder MATHPRINT (übliche mathematische Notation, erkennbar am ⁞⁞ -Zeichen als Platzhalter für eine erwartete Eingabe)
2nd mode = quit	Verlassen der aktuellen Ebene
clear	Löschen der letzten Eingabe links vom Cursor
2nd delete = insert	Einfügen eines Zeichens (ohne „insert" wird ein Zeichen überschrieben)
clear	Löschen des zuletzt eingegebenen Terms
math	Math-Option: Umwandeln von Brüchen, kgV, ggT, Primfaktorzerlegung, Summe von Termen, Produkt von Termen; weitere Optionen: numerisch, Umrechnung / Umwandeln von Winkelangaben
data	Optionen: Möglichkeit der Eingabe von drei Listen mit jeweils max. 42 Zahlen, Definition von Formeln für die Berechnung der Zahlen für die Listen
2nd data = stat-reg/distr	Optionen: STAT-REG: Auswertung statistischer Daten einschl. Regression, DISTR: Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Normal-, Binomial, Poisson-Vert.)
table	Optionen: *f(*: Möglichkeit, einen bereits definierten Funktionsterm in einem Term zu verwenden, *Edit function*: Eingabe eines Funktionsterms und Berechnen der Wertetabelle einer Funktion
2nd table = expr-eval	nach Eingabe eines Terms und der Eingabe eines einzusetzenden x-Werts erfolgt die Berechnung des Funktionswerts
2nd × = set op 2nd) = op	Möglichkeit, eine Abfolge von Operationen zu definieren Aufruf dieser Folge von Operationen
! nCr nPr	mehrfach belegte Taste: nacheinander Fakultät, nCr (= Binomialkoeffizient), nPr (Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge)
2nd ! nCr nPr = random	Erzeugung von Zufallszahlen – Optionen: „*rand*" = Zufallszahl aus dem Intervall [0 ; 1[oder „*random*(a,b)" = ganzzahlig (aus der Menge {a, …, b})
$x^{\square}$ 2nd $x^{\square}$ = $\sqrt[n]{x}$	Eingabe einer Potenz, Berechnen der n-ten Wurzel
$\frac{\square}{\square}$ 2nd $\frac{\square}{\square}$	Möglichkeit der getrennten Eingabe von Zähler und Nenner bzw. Kehrwert
sin sin⁻¹ cos cos⁻¹ tan tan⁻¹	mehrfach belegte Tasten: Berechnen von Funktionswerten trigonometrischer Funktionen und deren Umkehrung (zu einem Funktionswert den zugehörigen x-Wert berechnen) sowie der Hyperbelfunktionen sinh, cosh, tanh
ln log	mehrfach belegte Taste: nacheinander ln, log (Basis 10), log (bel. Basis)
$e^{\square}$ $10^{\square}$	mehrfach belegte Taste: nacheinander Potenzen zur Basis e bzw. 10
π e i	mehrfach belegte Taste: nacheinander π, e, i
2nd π e i = complex	Operationen mit komplexen Zahlen
x^{yzt}_{abcd}	Wahl der Variable (8 Möglichkeiten: x, y, z, t, a, b, c, d)
sto→ 2nd sto→ = recall 2nd x^{yzt}_{abcd} = clear var	Speichern einer Zahl (Angabe einer Variablen notwendig) Aufruf einer gespeicherten Zahl Löschen aller gespeicherter Zahlen
EE	Taste zur direkten Eingabe einer Zahl in wissenschaftlicher Notation
◂▸≈	Umwandeln eines Bruchs in eine Dezimalzahl und umgekehrt
on 2nd on = off	Einschalten bzw. Ausschalten des WTR
2nd 0 = reset	Löschen aller gespeicherter Daten und Terme

Leistungsfähige Emulator-Software

Die TI-SmartView™ Emulator-Software für TI-MathPrint™ unterstützt die Visualisierung im Unterricht, z.B. in Kombination mit einem interaktiven Whiteboard.
Probieren Sie es aus. Eine kostenlose Lizenz können Sie online auf den TI Webseiten anfordern.

Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zum TI-30X Plus MathPrint™.

Schauen Sie mal rein:
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

» Nutzen Sie unsere Kennenlernangebote speziell für Lehrkräfte und Schulen auf den TI Webseiten, Rubrik „Alles für die Schule".

» Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten.

» Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

www.youtube.com/TIedtechDE

education.ti.deutschland

@TIEducationDE

Haben Sie Fragen zu Produkten von Texas Instruments?
Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien oder einer Lehrerfortbildung interessiert?
Gerne steht Ihnen auch unser Customer Service Center mit Rat und Tat zu Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

Customer Service Center
TEXAS INSTRUMENTS
education.ti.com/csc

education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net