Upp och ned längs älven och andra historier

Problem 1

Från byn A till byn B har älven en medelhastighet på cirka 3 km/h. Antag att det tar en båt 3 timmar att färdas nedströms mellan de två byarna och 5 timmar att färdas uppströms samma sträcka.

1. Låt v_0 vara båtens hastighet i stillastående vatten. Hur kan hastigheten med strömmen och hastigheten mot strömmen uttryckas?

____

2. Använd ovanstående information för att fylla i de tomma utrymmena nedan. Det gäller ju att sträckan = hastighet · tid ($s = v \cdot t$)

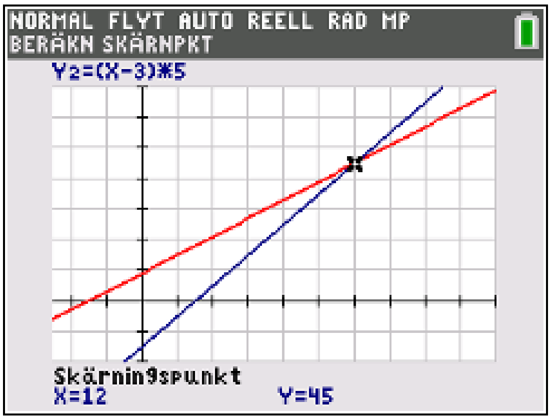
Färd med strömmen: s = ____ ____

Färd mot strömmen: s = ____ ____

Lösningen finns när avståndet ***s*** i båda ekvationerna är lika.

2. Ställ upp en ekvation som följer av att uttrycken för sträckan är lika med varandra och lös sedan ekvationen algebraiskt. Visa ditt arbete här.

Nu var detta en enkel ekvation som du antagligen inte hade några problem att lösa algebraiskt. Ett alternativt sätt att lösa ekvationen är att göra en grafisk/numerisk ekvation lösning genom att mata in vänster- och högerledet i din räknare som linjära funktioner Y1 och Y2. Vi visar här lösningen och uttrycket för färden mot strömmen. Det ger dig viss vägledning för fråga 1 och fråga 2.



Lösningen är alltså skärningspunkten.

3. Skriv nu in de två uttrycken och plotta linjerna. När du söker skärningspunkten trycker du på [2nd] [calc] och följer instruktionerna på skärmen. Koordinaterna för skärningspunkten kommer att visas. Gör du rätt borde du få en skärm som ovan. Beroende på fönsterinställning kan plottningen se lite annorlunda ut.
4. Vad står värdena X=12 och Y= 45 för?

5. Vilken hastighet har båten nedströms respektive uppströms?

Om man nu färdas medströms åt ena hållet och motströms åt andra hållet så borde strömmarna ta ut varandra och man kan beräkna medelhastigheten för hela resan som

$$\frac{v_{\text{medströms}} + v_{\text{motströms}}}{2}$$

Är detta sant?? Algebra på gång!

Låt sträckan vara s och hastigheterna v_1 och v_2. Färdtiderna blir då

$t_1 = \frac{s}{v_1}$ respektive $t_2 = \frac{s}{v_2}$ och medelvärdet blir då

$$\frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Detta medelvärde kallas *harmoniskt* medelvärde och förekommer i olika sammanhang.

Räkna nu ut medelhastigheten för en båtresa fram och tillbaka mellan byarna A och B. Slutför beräkningarna nedan:

$$v_{\text{medel}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} =$$

Man kan lätt tro att medelhastigheten blir

$$\frac{v_{\text{medströms}} + v_{\text{motströms}}}{2}$$

Nu färdas man under längre tid med den lägre hastigheten och då blir svaret något annat.

Nu tänker vi oss situationen att en båt färdas medströms från A och en båt motströms från B. De startar samtidigt.

6. Vad kommer de att mötas? För att kunna beräkna var kommer att mötas så måste du känna till avståndet mellan A och B. Det har du beräknat tidigare.

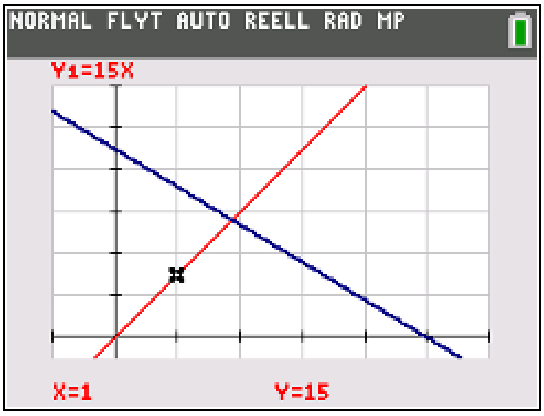
____

____

____

Ett sätt att lösa detta problem är att rita s.k. *s-t*-diagram med tiden på x-axeln och sträckan på y-axeln. Vi placerar A i origo.

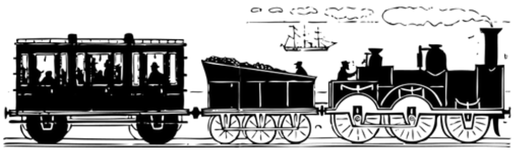
Så här ser nu diagrammet ut och man kan sedan trycka på [2nd] [calc] för att komma åt en instruktion för att beräkna skärningen mellan funktioner. Du ser nu ekvationen för den röda linjen.



Vi har här spårat i linjen som visar färden medströms. Enheterna är som tidigare timmar för tid och km/h för hastigheten.

Man kan naturligtvis räkna ut var båtarna möts genom att arbeta helt algebraiskt och då få ett exakt resultat. När man arbetar grafiskt/numeriskt är det inte säkert att man ett exakt resultat.

Problem 2



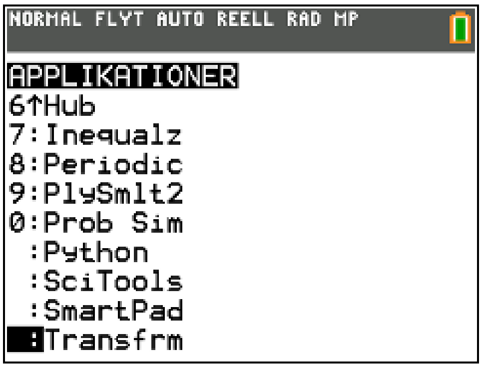
Problem 2

Frida åker på ett gammalt långsamt ångdrivet tåg. När hon promenerar framåt färdas hon 800 m på 1 minut. När hon går tillbaka till sin plats färdas hon 600 m på 1 minut.

Vi börjar med att omvandla till enheten km/h:

800 m/min = 0,8 km/min= 48 km/h
600 m/min= 0,6 km/min= 36 km/h

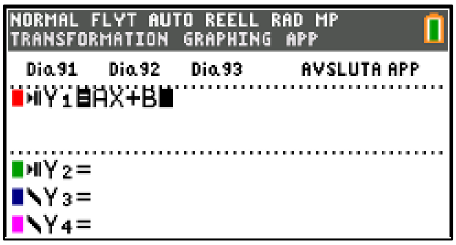
Du ska nu undersöka den här situationen grafiskt och vi ska använda en av de förinstallerade apparna, nämligen den som heter **Transfrm**.



Appen *Transformation Graphing* förbättrar arbetet i funktionsläget så att du kan undersöka vad som händer om du ändrar koefficientvärden hos funktioner utan att lämna graffönstret. Appen är endast tillgänglig i funktionsläget FUNKTION. Tryck på [mode] så ser du vilket läge du har.

Tryck nu på tangenten [y=]. Då ser inmatningsfönstret ut så här och du kan på platserna Y1 och Y2 mata in funktioner där du använder bokstäverna A, B, C och D.

Det kan till exempel se ut så här när vi använder bokstäverna A och B som parametrar.

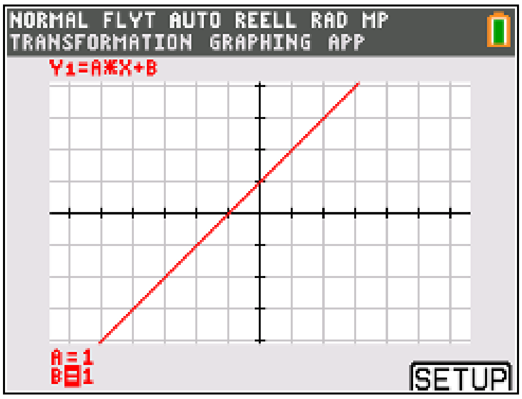


Alla andra koefficienter fungerar som konstanter och använder värdet i minnet.

Du stegar genom transformationen av en funktion eller animerar med olika uppspelningsstilar; spela upp/pausa, spela upp och snabb uppspelning. Du kan mata in funktionerna direkt eller använda dialogrutan för färg/linjestil för att klistra in funktioner som till exempel A sin(B(X-C)) + D, A(X-B)(X-C) när det gäller andragradsfunktioner och $A{\cdot}B^X$ när det gäller exponentialfunktioner.

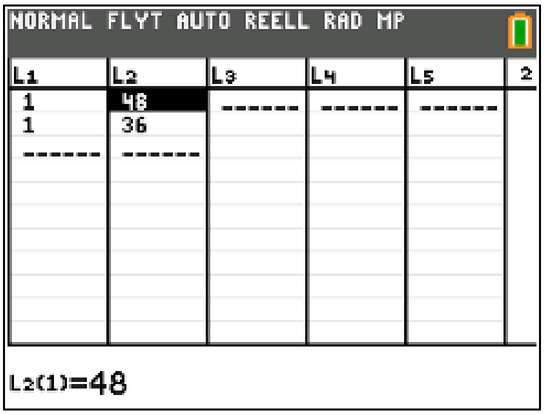
OBS: För att du ska kunna plotta snabbt så ska du se till att upplösningen är inställd på **3**. Då visas var tredje pixel men det räcker bra vid plottningen.

Här har vi nu plottat den räta linjen AX+B. Parametervärdena står längst ner till vänster på skärmen.

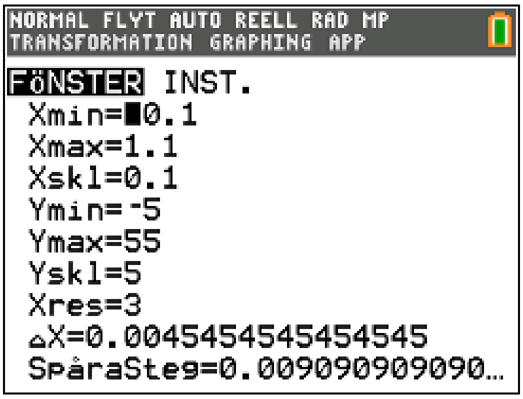


Så här ser SETUP-menyn ut när vi har plottat den räta linjen ovan.

Börja nu med att skapa ett spridningsdiagram med datapunkterna (1, 48) och (1, 36). Dessa datapunkter representerar hur långt man hinner (i km) på en timme och det är ju hastigheterna för Frida relativt omgivningen utanför tåget när hon promenerar *med* respektive *mot* tågets rörelse.

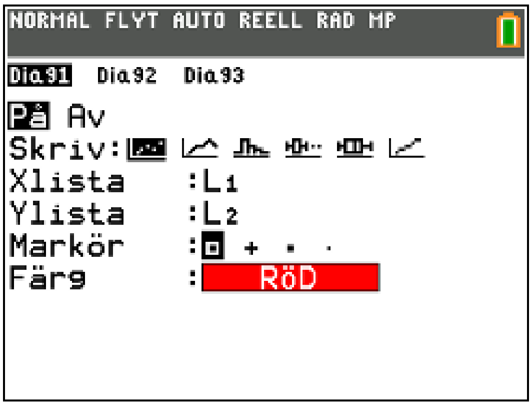


Ställ nu in ditt fönster så här innan du plottar datapunkterna.

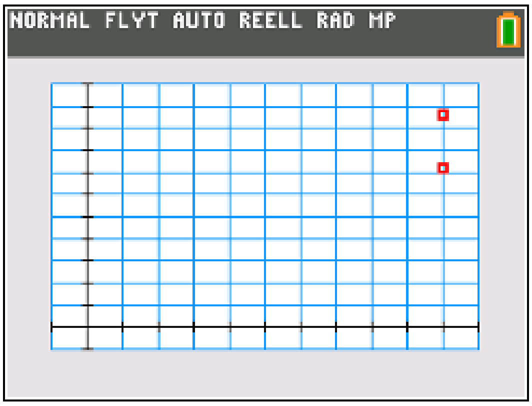


Du ser arr vi har ställt in upplösningen (Xres) till 3.

Om du nu trycker på [2nd] [stat plot] så kan du göra inställningar för statistikplottning:

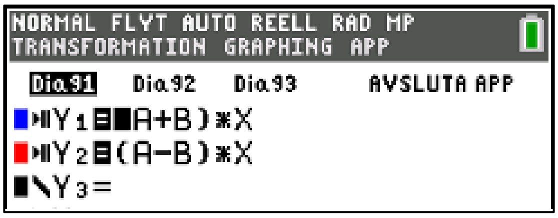


Så här ser nu plottningen ut

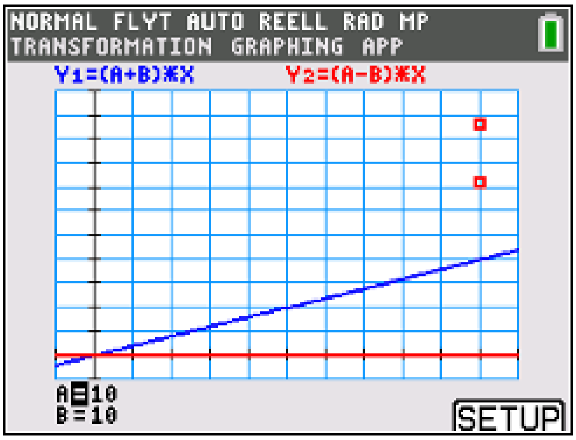


Vi ska nu rita två linjer i diagrammet ovan. Vi har ju tiden på *x*-axeln och sträckan på *y*-axeln. Efter en timme så skulle Frida ha hunnit 48 km om hon rört sig i tågets riktning. Om hon i stället rör sig motsatt tågets riktning så skulle hon hunnit 36 km. Vilka hastigheter har då tåget och Frida?

Tryck sedan på [y=] och skriv in funktionerna Y1 och Y1 enligt skärmbilden nedan:



A är ju tågets hastighet och B är Fridas hastighet. Beroende på inställda värden på A och B så kan linjerna naturligtvis vara helt olika. Med startvärden A=10, B=10 och Steg=1 ser det ut så här vid plottning:

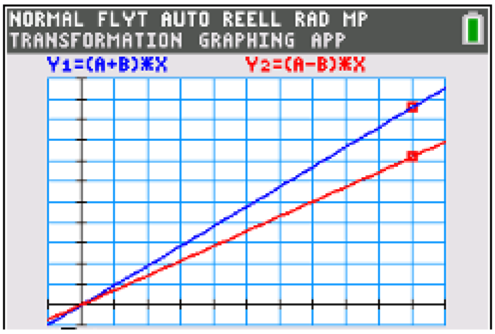


I dessa ekvationer står alltså A för tågets hastighet och B för Fridas gånghastighet. Du ska nu ändra värdena på A och B så att linjerna går igenom punkterna. Du ökar värdet genom att trycka på [▶], minskar genom att trycka på [◀] och du hoppar mellan A och B med [▼] och [▲].

Använd nu piltangenterna för att ändra värdena för A och B så att linjerna går genom punkterna. Om du vill göra större hopp kan du ändra steget i SETUP. Y1 ska gå genom den övre punkten och Y2 ska gå genom den nedre punkten.

1. Vad representerar linjernas lutning i s-t-grafen?

Så här ser det ut när linjerna går igenom punkterna. Vi har tagit bort nedre delen av diagrammet så att du inte ser värdena på A och B.



2. Hur snabbt rör sig tåget och hur snabbt går Frida inuti tåget?

3. Hur gör du för att beräkna tågets hastighet och Fridas hastighet utan att göra en plottning och läsa av?