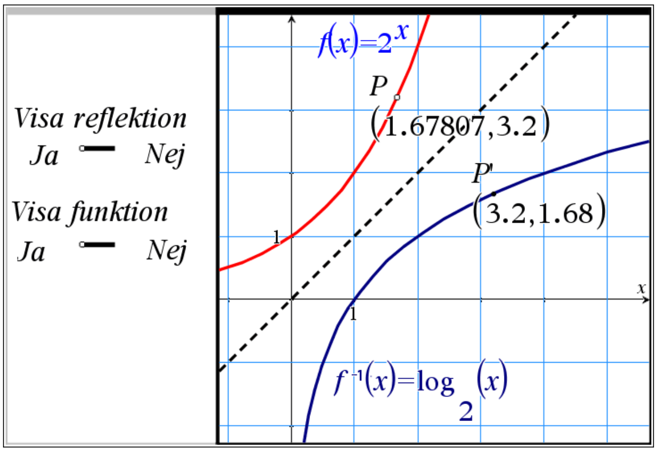
Upptäcka logaritmer

Problem 1

På denna första sida visar vi exponentialfunktionen $y=2^x$,spegellinjen *y=x* och exponentialfunktionens invers, dvs $x=2y$ eller $y=\log_2 x$. Man kan välja att visa eller dölja spegellinjen och den inversa funktionen.



Fråga 1 a) och 1b): Definitionsområdet är $(-\infty,\ \infty)$ och värdemängden $(0,\ \infty)$. För logaritmfunktionen är definitionsområdet $(0,\ \infty)$ och värdemängden $(-\infty,\ \infty)$, dvs tvärtom.

1 c) Inversen kan ju skrivas *x=2y*. Punkterna *P* och *P´* visar ev inte samma antal värdesiffror men avrundningen är inte korrekt.

1 d) *x* måste vara större än 0 eftersom intervallet för $f(x)=b^x$ är $(0,\ \infty)$ och därmed är definitionsområdet för $f^{-1}(x)=\log_2(x)$ måste vara $(0,\ \infty)$. *b* måste vara större än 0 eftersom negativa värden för *b* kommer att resultera i negativa värden för *x* och *x* måste vara större än 0. *b* kan inte vara lika med 1 för när *b* = 1, är funktionen linjär, inte exponentiell.
1 e) Flytta punkten *P* så att koordinaterna blir (1, 2). Punkten (1, 2) på $f(x)=2^x$ säger oss att $2^1=2$. *P´* har koordinaterna (2, 1) och denna punkt på inversen $f^{-1}(x)=\log_2(x)$ säger oss att $\log_2 2=1$.

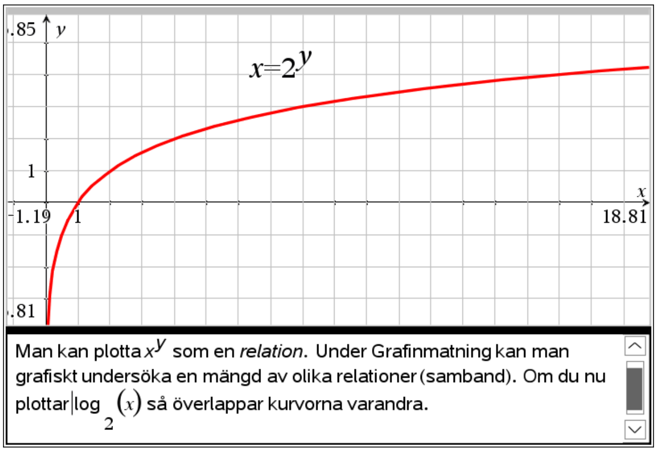
1 e) Se tabellen i nästa spalt

P	***P´***	**Exponentiellt uttryck**	**Logaritmiskt uttryck**
(1, 2)	(2, 1)	$2^1=2$	$\log_2 2=1$
(2, 4)	(4, 2)	$2^2=4$	$\log_2 4=2$
(3, 8)	(8, 3)	$2^3=8$	$\log_2 8=3$
(0, 1)	(1, 0)	$2^0=1$	$\log_2 1=0$
$\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2}=-1$
$\left(-2,\ \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4},\ -2\right)$	$2^{-2}=\frac{1}{4}$	$\log_2 \frac{1}{4}=-2$
$\left(-3,\ \frac{1}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{8},\ -3\right)$	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$\log_2 \frac{1}{8}=-3$

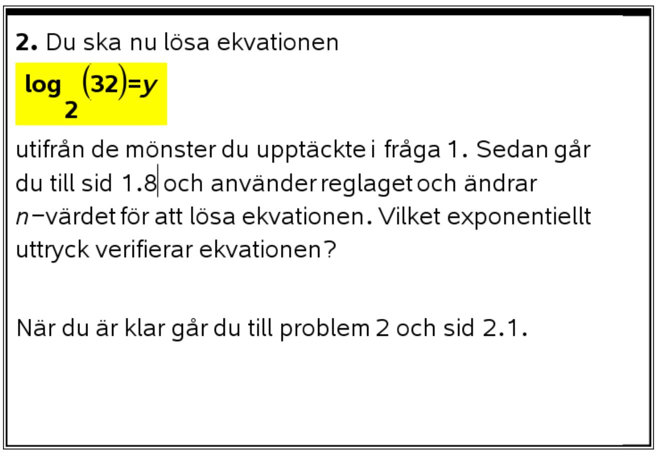
Man kan behöva påminna eleverna om att

$2^{-x}=\frac{1}{2^x}$. Då är $\log_2 \frac{1}{2^x}=-x$.

Sid 1.6



Med TI-Nspire kan man plotta olika typer av relationer. Det gäller t.ex. olika typer av kägelsnitt.



2. Du ska nu lösa ekvationen

log₂(32)=y

utifrån de mönster du upptäckte i fråga 1. Sedan går du till sid 1.8 och använder reglaget och ändrar *n*−värdet för att lösa ekvationen. Vilket exponentiellt uttryck verifierar ekvationen?

När du är klar går du till problem 2 och sid 2.1.

Här är svaret naturligtvis *n*= 5 eftersom $2^5=32$.

3. Nu ska du lösa ekvationen

$\log_4\left(\frac{1}{256}\right)=y$

Gör på samma sätt som i förra frågan, dvs använd reglaget på nästa sida och ändra n–värdet för att lösa den logaritmiska ekvationen. Vilket exponentiellt uttryck verifierar ditt resultat?

4. Lisa löste den logaritmiska ekvationen $\log_4(32)=8$. Hon säger att svaret är 8 eftersom $4\cdot 8=32$. Resonerar hon korrekt? Motivera ditt svar.

5. Simon påstår att när man löser en logaritmisk ekvation på formen $\log_b(a)=y$ så kan man skriva om den som $b^a=y$. Vad säger du om Simons starategi? Förklara.

Fråga 3: n = -4 eftersom $4^{-4}=\frac{1}{256}$

Fråga 4: Lisa har fel. Den logaritmiska ekvationen $\log_4 16=y$ är samma sak som $4^y=16$ då vi uttrycker det exponentiellt. Vi ser direkt att svaret är 2 eftersom $4\cdot 4=16$. Alltså: $\log_4 16=2$.

Fråga 5: Detta är inte heller sant. Det finns ett inverst samband mellan logaritmiska uttryck och exponent-iella uttryck. Den korrekta exponentialekvationen är $b^y=a$.

Problem 3

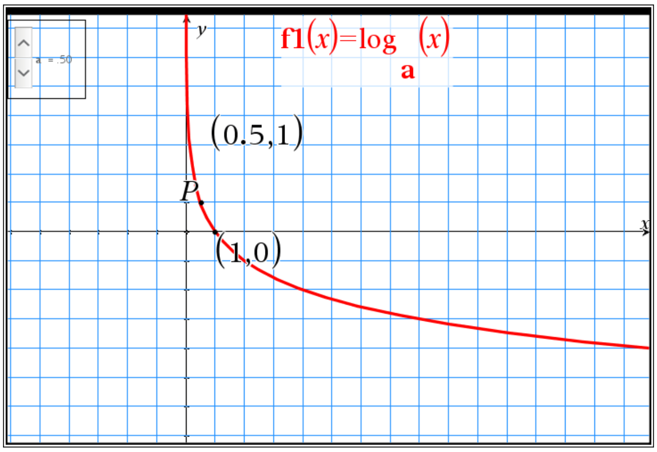
Fråga 6a) När a = 1 så existerar inte funktionen.

b) Om vi har $\log_1 x=y$ så är detta samma sak som $x=1^y$. 1 upphöjt till någon potens är alltid 1. Därför är den enda möjliga grafisk lösningen en vertikal linje vid x = 1 och det är ingen funktion.

c) Om a = 0 existerar inte funktionen.

d) $\log_0 x=y$ är samma sak som $x=0^y$ och 0 upphöjt till någon potens är alltid 0. En grafisk lösning är den vertikala linjen x= 0 (y-axeln) och det är ingen funktion.

Däremot existerar funktionen för värden på a mellan 0 och 1. I grafen är a= 0.5.



Fråga 7 a) och b): Funktionen är växande för a >1 och avtagande för 0<a<1.

Fråga 8 a) Skärningen med x-axeln är *alltid* vid x= 1 eftersom $\log_a 1=0$ för alla värden på ***a***. Ekvationen kan ju skrivas som $a^0=1$.

b) Om det ska finnas någon skärning med y-axeln måste x vara noll och detta medför ju att $\log_a 0=y$ vilket kan skrivas om som $a^y=0$ och det är ju inte möjligt.

c) Punkten P har koordinaterna (a, 1) för alla värden på a. $\log_a a=1$ kan ju skrivas som $a^1=a$.

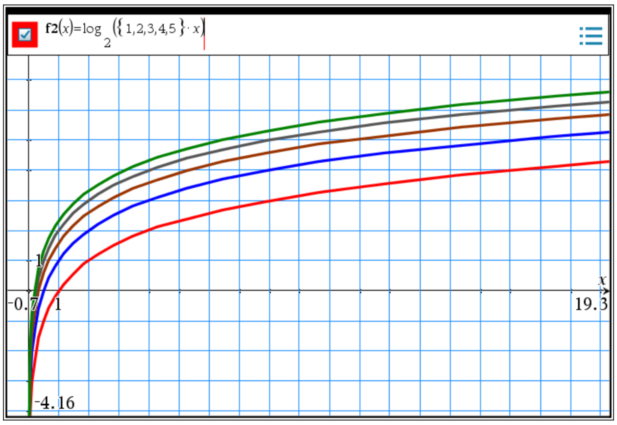
Fråga 9 a): $f(x)$ blir allt större och större när x växer.

b) Funktionsvärdet närmar sig -∞ när x-värdena närmar sig 0.

Fråga 10: Definitionsmängden är (0, ∞) och värdemängden är (-∞, ∞).

En utvidgning:

Nedan vi har vi plottat en kurvskara med funktionerna $\log_2(b\cdot x)$ där b antar värdena 1, 2, 3, 4 resp. 5. Vi ser att lutningen hos kurvorna verkar vara desamma. Det ser ut som om kurvorna är parallellförflyttade vertikalt.



Om vi beräknar derivatorna får vi detta bekräftat. Alla 5 funktionerna har samma derivata och de är alla omvänt proportionella mot x-värdet.

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{f2}(x)\right)$$

$$\blacktriangleright \left\{\frac{1}{\ln(2)\cdot x},\frac{1}{\ln(2)\cdot x},\frac{1}{\ln(2)\cdot x},\frac{1}{\ln(2)\cdot x},\frac{1}{\ln(2)\cdot x}\right\}$$

Man förstår ju att det måste vara på detta sätt om man tittar på första logaritmlagen

$\log(b)+\log(x)=\log(b\cdot x)$

Hur är det med andra typer av funktioner? Räta linjer, andragradsfunktioner och inversen till logaritm-funktionen, nämligen exponentialfunktionen?

Mer om derivator och logaritmer kommer i senare kurser.