Utforska cirkelns ekvation

Målet med denna aktivitet är att

- eleverna förstår definitionen av en cirkel som en uppsättning av punkter som är lika långt från en given punkt.
- eleverna förstår att koordinaterna för en punkt på en cirkel måste uppfylla denna cirkels ekvation.
- eleverna relaterar Pythagoras sats och avstånds-formeln till ekvationen för en cirkel.
- eleverna utifrån ekvationen för en cirkel skriven på formen $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ kan identifiera radien *r* och medelpunkten (*h*, *k*).
- Eleverna kan härleda cirkelns ekvation utifrån en given medelpunkt och en given radie med hjälp av Pythagoras sats.

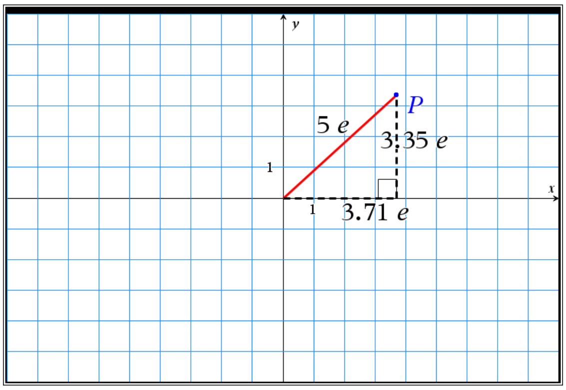
I denna aktivitet ska eleverna plotta punkter som ligger på ett fixt avstånd från origo, utvidga en cirkel med medelpunkt i origo, förflytta en cirkel från origo och till sist både utvidga och förflytta cirkeln samtidigt som de spårar en punkt längs omkretsen.

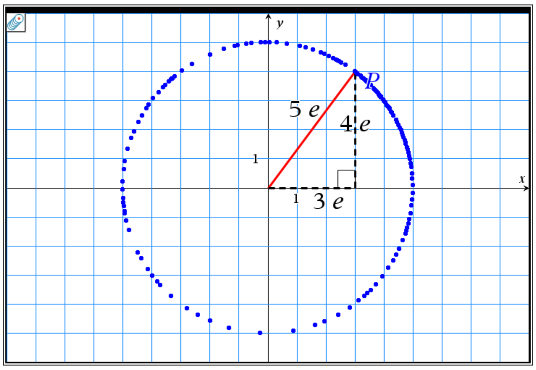
Detta innebär att eleverna kan

- visualisera definitionen för en cirkel och sam-bandet mellan radien och hypotenusan I en rätvinklig triangel.
- observera konsekvenserna av förflyttningar och utvidgningar på cirkelns ekvation.
- förstå sambandet mellan cirkelns ekvation och Pythagoras sats och sambandet mellan cirkelns ekvation och avståndsformeln.
- Identifiera radien *r* and medelpunkten (*h*, *k*) hos cirkeln och sluta sig till att koordinaterna hos en punkt satisfierar cirkelns ekvation.

Problem 1

Sid 3





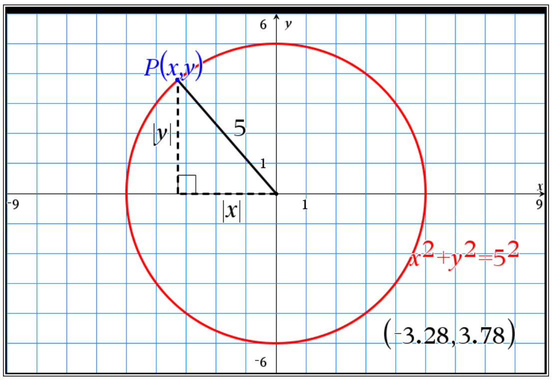
Om man från verktygslådan väljer Spåra/Spåra geometri och markerar punkten P och ta sedan tar tag i punkten och drar så får man en cirkel. Se ovan.

Svar på elevfrågorna:

1 a) Eleverna bör observera att man får en plottning av alla punkter som ligger på avståndet 5 från origo och att punkterna bildar en cirkel.

1 b) Längden hos kateterna ändras men hypotenusans längd förblir konstant.

Sid 5 och 6: På sid 5 ska eleverna svara på en del frågor som rör sidan nedan.



2 a) Hypotenusan I den rätvinkliga triangeln är radie i cirkeln och hypotenusan och radien har samma längd.

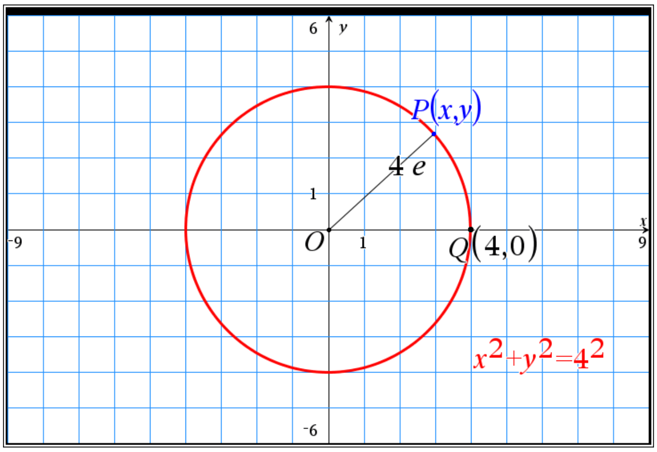
2 b) Absolutvärdet hos x-koordinaten är längden hos den vågräta kateten och absolutvärdet hos y-koordi-naten är längden hos den vertikala kateten.

2 c) Pythagoras sats används för att beräkna hypo-tenusans längd. Från tidigare frågor bör eleverna inse att när punkten P rör sig runt cirkeln så rör sig också triangeln och triangelns sidor används för att konstru-era cirkeln och dess ekvation.

2 d) Koordinaterna hos punkten P måste satisfiera cirkelns ekvation. Om värdena sätts in i ekvationen så måste x^2+y^2 vara lika med 25.

Vi har en inställning med avrundning till två decimaler så det kan naturligtvis inte bli exakt 25. Man kan ställa om antalet visade decimaler genom att placera markören på värdet, högerklicka och välja Attribut.

Sid 7 och sid 8



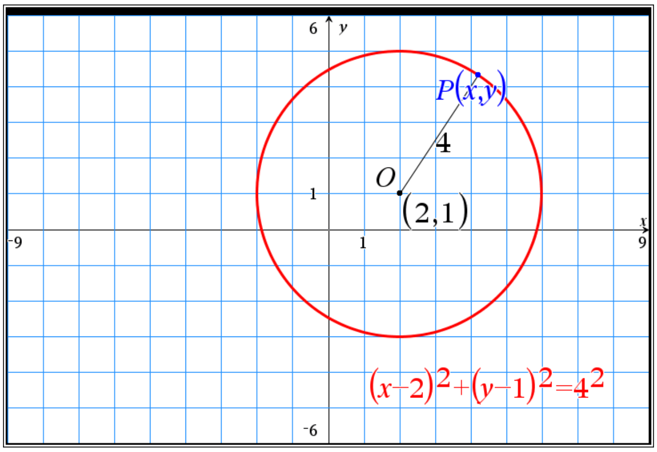
Här ska man dra i punkten Q och se förändringarna i ekvationen.

Svar på frågorna:
3 a**)** När radien ändras så förändras bara konstanttermen i högerledet hos ekvationen.

3b) Konstanttermen förändras därför att i Pythagoras sats så motsvarar det längden på hypotenusan i en triangel och denna hypotenusa är också cirkelns radie

Uppmuntra eleverna att dra punkt *Q* till vänster om *y*-axeln. Även om punkten *Q*:s *x*-värde då blir negativ, förblir kvadraten på detta värde positiv. För att förstärka vad det innebär att uppfylla ekvationen för en cirkel, sätt in koordinaterna för punkt *Q* i ekvationen. Se till att eleverna ser sambandet mellan *Q* och hypotenusan hos triangeln.

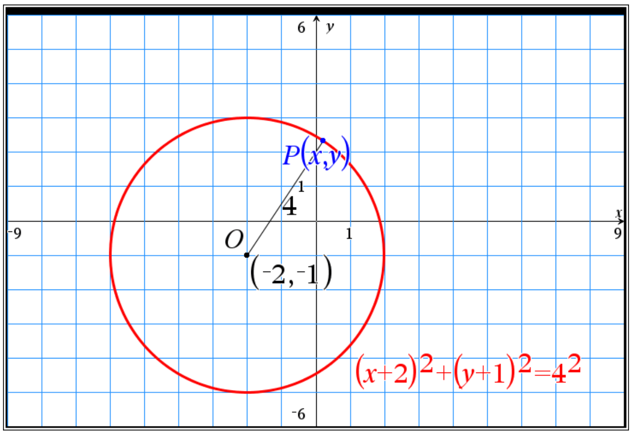
Sid 9 och Sid 10:



Här ska eleverna flytta medelpunkten O från origo.

Svar på frågorna:

4 a) Konstanttermerna i parenteserna (med ombytt tecken) är koordinaterna för cirkelns medelpunkt. Om medelpunkten flyttas till tredje kvadranten blir det så här (se nästa spalt):



Nu blir ekvationen i stället

$$(x-(-2))^2+(y-(-1))^2=4 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2+(y+1)^2=4$$

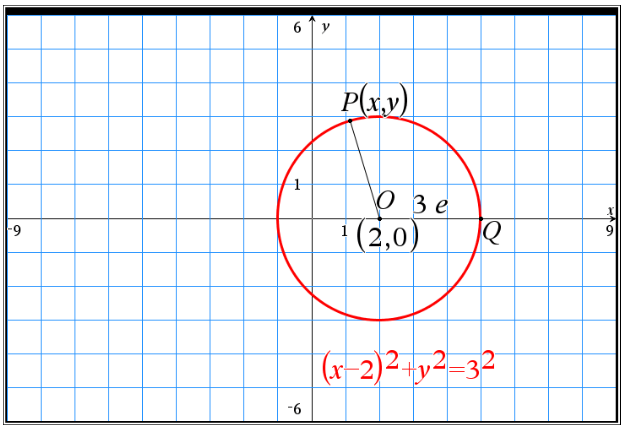
4 b) Man använder avståndsformeln:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

4 c) Alla punkter på en cirkel ligger på samma avstånd från cirkelns medelpunkt. Detta avstånd har ett bestämt värde varför det är ett tal I högra ledet I cirkelns ekvation istället för ett ”d”. Cirkelns medelpunkt är ju känd så dess koordinater finns med i det ena koordinatparet i avståndsformeln.

Sid 11 och Sid 12

Här ska man flytta medelpunkten hos cirkeln genom att dra i punken *O* och dessutom ändra också radien genom att dra i punken *Q*. Dra punken P runt i cirkeln.



Svar på frågorna:

5 a) *x*- och *y*-variablerna I ekvationen representerar koordinaterna för alla punkter som ligger på cirkeln. *x*- och *y*-koordinaterna representerar också alla punkter vars koordinater satisfierar cirkelns ekvation.

5 b) Cirkelns radie är 6 och koordinaterna för medelpunkten är (3, -4).

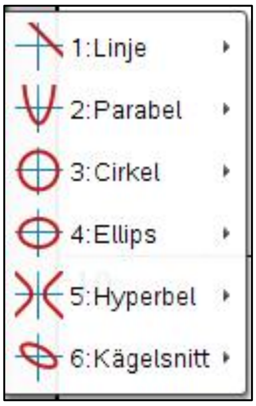
5 c) Sätt in koordinaterna i ekvationen och kontrollera om V.L.=H.L.

Problem 2

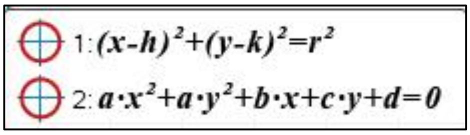
Sid 1-sid 5

Eleverna ska nu rita en cirkel med medelpunkt (2, 3) och radien 4.

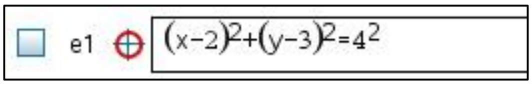
Det finns flera sätt att göra detta. I grafapplikationen kan man välja Grafinmatning/Redigera och sedan Ekvation. Då får man en meny för linjer och olika typer av kägelsnitt.



Man väljer 4:Cirkel och sedan alternativ 1 nedan

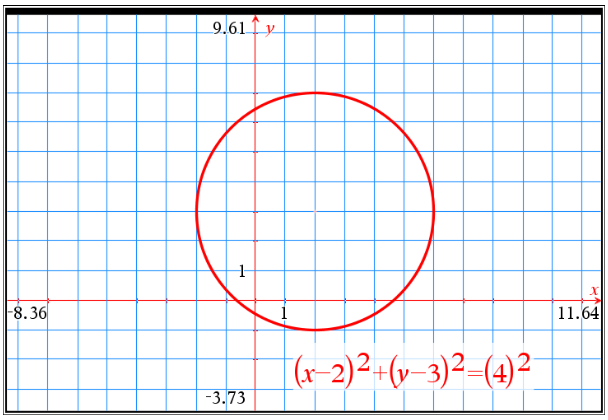


I inmatningsfältet fyller man sedan i koefficienterna enligt nedan.

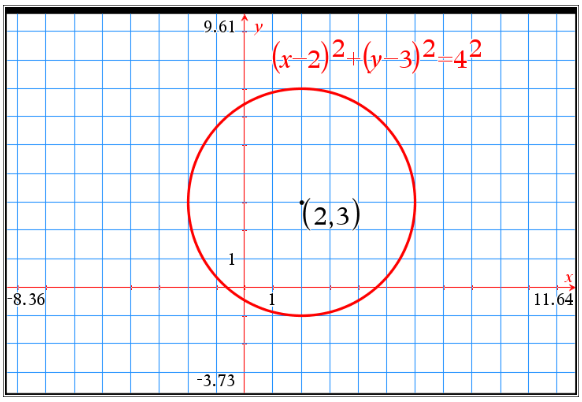


Nu ritas cirkeln upp. Du kan nu flytta markören till medelpunkten och sedan flytta cirkeln. Du kan också peka på själva cirkeln och sedan dra i den så att radien blir större/mindre.

Ett annat sätt är att dubbelklicka på cirkeln och sedan ändra koefficienterna i ekvationen.



Man kan också rita en cirkel med geometriverktygen i grafapplikationen. Du kan flytta medelpunkten och dra i själva cirkeln men du kan *inte* redigera ekvationen.

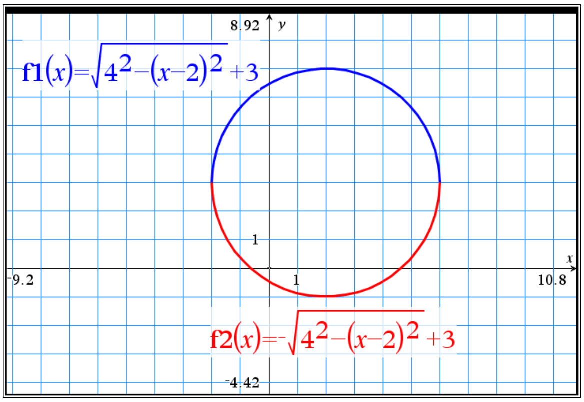


Ett tredje sätt att rita en cirkel är att rita den i *parameterform*. Mata då in

$$x1(t)=2+4\cos(t)$$
$$y1(t)=3+4\sin(t)$$

i inmatningsfältet och ställ intervallet för *t*.

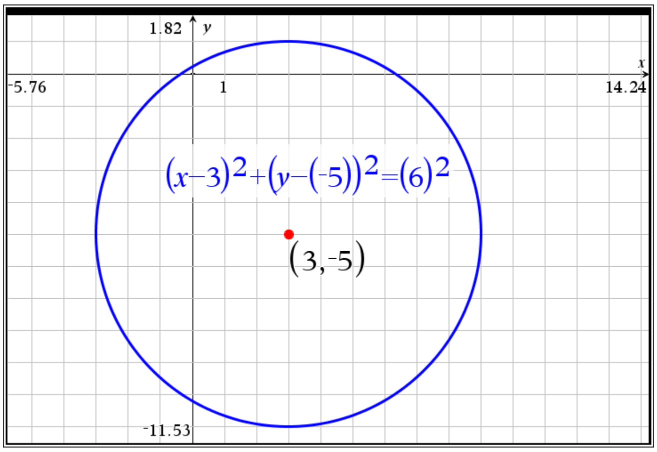
Man kan även rita en cirkel som två halvor genom att mata in halvorna som *funktioner*.



Sid 6

6) Vi har cirkeln $(x-3)^2+(y+5)=6^2$. Ange koordinaterna för några punkter som ligger på cirkelns periferi. Börja med att rita cirkeln och undersök vilka värden *x*− och *y*−kordinaterna kan anta.

Här har vi ritat cirkeln med Grafinmatningsverktyget alternativ för Ekvationer. Man kan se att möjliga värden för *x*- och *y*-koordinaterna är $-3 \le x \le 9$ resp. $11 \le y \le 1$.



Vi kan t.ex. välja punkter med *x*-koordinaterna 2 och 8 och lösa ut *y*-värdet ur cirkelekvationen:

$\text{solve}\left((2-3)^2+(y+5)^2=6^2,y\right)$

▸ $y=-(\sqrt{35}+5)$ or $y=\sqrt{35}-5$

$y=-(\sqrt{35}+5)$ or $y=\sqrt{35}-5$

▸ $y=-10.9161$ or $y=0.91608$

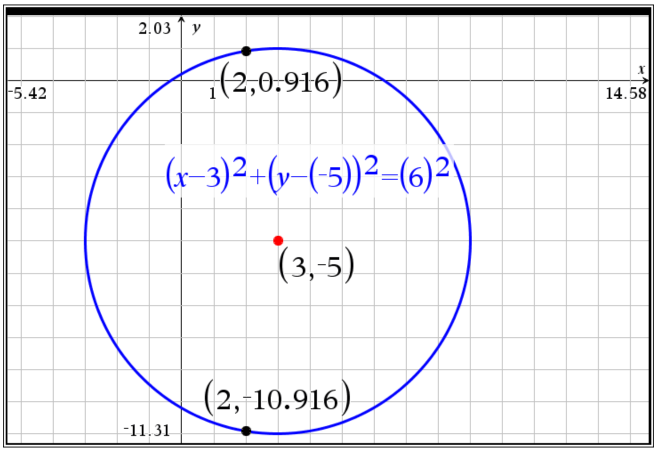
$\text{solve}\left((8-3)^2+(y+5)^2=6^2,y\right)$

▸ $y=-(\sqrt{11}+5)$ or $y=\sqrt{11}-5$

$y=-(\sqrt{11}+5)$ or $y=\sqrt{11}-5$

▸ $y=-8.31662$ or $y=-1.68338$

Nedan visar vi punkterna med *x*-koordinaten 2.



Problem 3

Sid 1-Sid 2

Här ska man använda den utvecklade formen för att rita samma cirkel. Man använder då alternativ 2

1: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

2: $a\cdot x^2+a\cdot y^2+b\cdot x+c\cdot y+d=0$

Och skriver in ekvationen så här:

e1 $1\cdot x^2+1\cdot y^2+(-4)\cdot x+(-6)\cdot y+(-3)=0$

Sid 3

Här ska eleverna bestämma medelpunkt och radie i en cirkel med ekvationen $2x^2+2y^2-5x+4y-3=0$.

Man måste då skriva om ekvationen i faktorform. En bra hjälp där är att använda kvadratkomplettering med instruktionen *Complete Square,* som finns bland algebraverktygen. Man kan naturligtvis också göra detta ”för hand”.

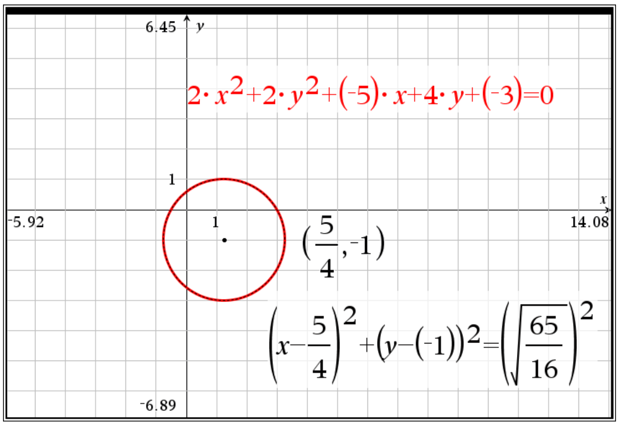
$\text{completeSquare}\left(2\cdot x^2+2\cdot y^2-5\cdot x+4\cdot y-3=0,x,y\right)$

▸ $2\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+2\cdot(y+1)^2=\frac{65}{8}$

som skrivs om som

$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+(y+1)^2=\frac{65}{16}$

Nu kan vi direkt se att medelpunkten är (5/4, -1) och radien är $\sqrt{\frac{65}{16}}$. Eleverna kan rita cirkeln i de två formerna och se att de ”täcker” varandra.



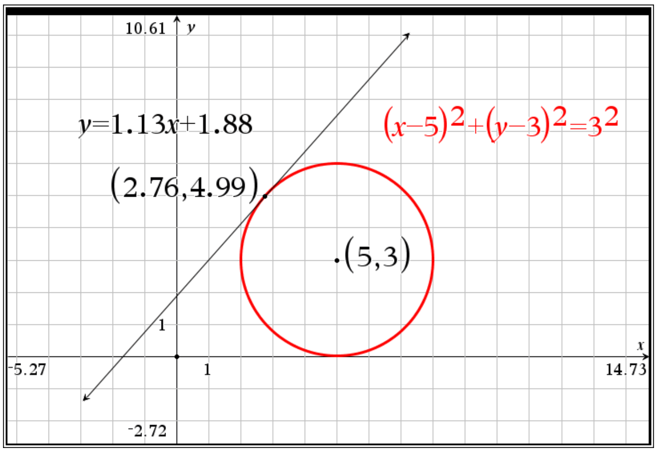
Problem 4

Avslutningsvis har vi med ett svårare problem där man ska utnyttja programmets CAS-funktioner.

Till en cirkel med radien 3 och medelpunkt i (5, 3) dras en tangent som passerar origo. Beräkna nu tangeringspunktens koordinater.

a) Vi har med att med geometriverktygen ritat cirkeln och sedan dragit en tangent. Försök att dra tangenten så att den så nära som möjligt går igenom origo. Vilka ungefärliga koordinater har tangeringspunkten?

b) Beräkna tangeringspunkten *exakt*. Använd gärna programmets algebraverktyg, t.ex. om du behöver lösa en ekvation eller förenkla ett längre uttryck.



Verktyget för att dra tangenter finns under Punkter och linjer bland geometriverktygen. Vi visar nu med några skärmbilder hur man kan lösa problemet.

Vi känner nu till ekvationen för cirkeln och tangentens ekvation kan vi skriva som $y=k\cdot x$. Vi sätter in koordinaterna för tangeringspunkten i cirkelekvationen:

$(x-5)^2+(k\cdot x-3)^2=3^2 \blacktriangleright (k^2+1)\cdot x^2+(-6\cdot k-10)\cdot x+34=9$

Vi löser nu denna ekvation med avseende på x:

$\text{solve}\left((k^2+1)\cdot x^2+(-6\cdot k-10)\cdot x+34=9,x\right)$

$\blacktriangleright x=\dfrac{-\left(\sqrt{-2\cdot k\cdot(8\cdot k-15)}-3\cdot k-5\right)}{k^2+1}$ or $x=\dfrac{\sqrt{-2\cdot k\cdot(8\cdot k-15)}+3\cdot k+5}{k^2+1}$

Ekvationen kan bara ha en lösnings eftersom det är en tangeringspunkt. Det betyder att uttrycket under rottecknet måste vara noll. Se nästa skärmbild.

Eftersom det bara finns en lösning måste uttrycket i under rottecknet vara noll. Detta ger

$\text{solve}(-2\cdot k\cdot(8\cdot k-15)=0,k) \blacktriangleright k=0 \text{ or } k=\dfrac{15}{8}$

Detta ger x-koordinaten för tangeringspunkten:

$\dfrac{3\cdot k+5}{k^2+1}\Big|k=\dfrac{15}{8} \blacktriangleright \dfrac{40}{17} \quad \dfrac{40}{17} \blacktriangleright 2.35294$

y-koordinaten: $\dfrac{\frac{15}{8}\cdot 40}{17} \blacktriangleright \dfrac{75}{17} \quad \dfrac{75}{17} \blacktriangleright 4.41176$

Lösningen k=0 motsvarar ju y-axeln som också tangerar cirkeln.

Kontroll. Vi sätter in värdena för tangeringspunkten i cirkelekvationen:

$\left(\dfrac{40}{17}-5\right)^2+\left(\dfrac{75}{17}-3\right)^2=9 \blacktriangleright \text{true}$ Likheten gäller!

En annan vinkling på problemet:

Vi kan skriva *överhalvan* av cirkeln som en funktion:

$y=-\sqrt{3^2-(x-5)^2}+3$. Vi beräknar sedan derivatavärdet av denna funktion för x = 40/17.

$\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{3^2-(x-5)^2}+3\right)\Big|x=\dfrac{40}{17} \blacktriangleright \dfrac{15}{8}$

Här har vi ritat överhalvan som en funktion och även ritat linjen $y=\dfrac{15}{8}\cdot x$.

Vi ser koordinaterna för tangeringspunkten och funktionens derivatavärde i tangeringspunkten.