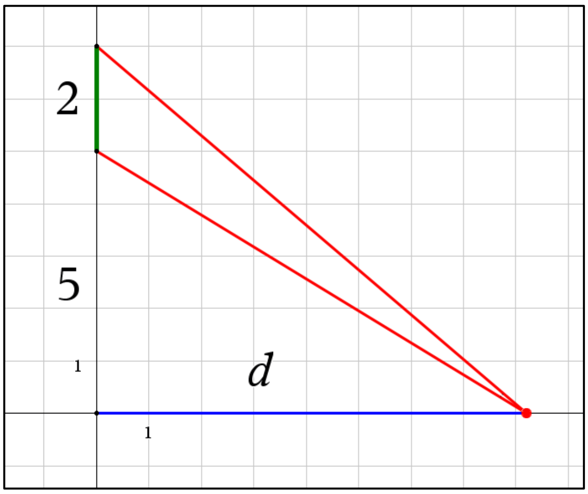
Beräkningar med synvinkel

Du står under en reklamskylt. Skylten sitter 5 meter upp på väggen och är 2 meter hög. Hur långt från skylten ska du placera dig (dina ögon) för att se den under *största* synvinkeln? Nedan syns en enkel illustration av situationen.



Räkna med tangens

Ur figuren på förra sidan kan vi teckna uttryck för två vinklar. Den eftersökta synvinkeln är differensen mellan de två vinklarna. *d* är det horisontella avståndet till betraktaren. Om vinklarna mellan linjen d och de röda sträckorna är *a* respektive *b* så gäller

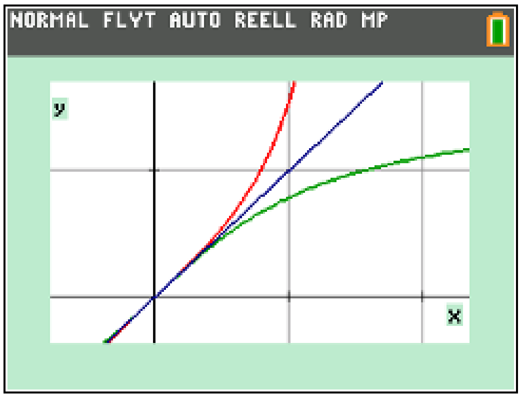
tan(*a*)=5/*d* och tan(*b*)=(5+2)/*d*

Ur figuren på förra sidan kan vi teckna uttryck för två vinklar. Den eftersökta synvinkeln är differensen mellan de två vinklarna. d är det horisontella avståndet till betraktaren.

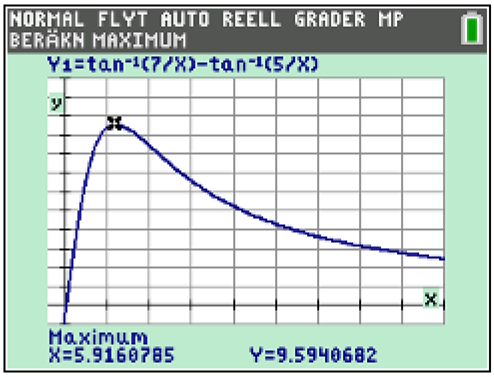
Detta ger att den eftersökta vinkeln är

$$\tan^{-1}\left(\frac{7}{d}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{5}{d}\right)$$

Du vet säkert id det här laget att tan *x* och $\tan^{-1} x$ är varandras inverser. Tan^{-1} x är alltså en vinkel.



Vi kan börja med att plotta uttrycket för den eftersökta vinkeln som en funktion och titta på när vi har ett maximum.
Vi ser att när avståndet är ca 5,92 m är vinkeln ca 9,6 grader.



Kan vi hitta ett exakt uttryck för den maximala vinkeln? Du känner kanske till formeln

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Vi använder nu denna formel. Vi får då att tangens för den eftersökta vinkeln är:

$$\frac{\frac{7}{d}-\frac{5}{d}}{1+\frac{7}{d}\cdot\frac{5}{d}}$$

Vi förenklaruttrycket och får då

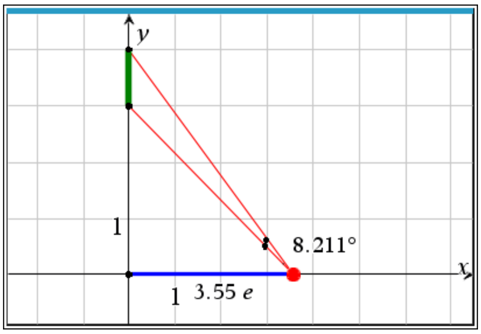
$$\frac{2d}{d^2+35}$$

Beräkning av derivatan ger

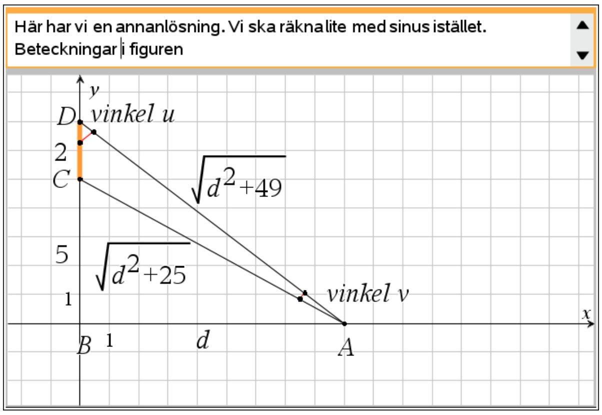
$$\frac{-2(d^2-35)}{(d^2+35)^2}$$

Slutför nu uppgiften och beräkna ett exakt värde för den eftersökta vinkeln. Jämför med den numeriska beräkningen.

Gör nu också en *exakt* beräkning när skylten sitter 3 m upp på väggen och att den är 1 m hög. Ett närmevärde är 8,2 grader.



Räkna med sinus



Börja med att titta på vinkeln *u*. Vi får

$$\sin u = \frac{d}{\sqrt{d^2+49}} \qquad (1)$$

Sinussatsen i triangeln *ABD* ger då

$$\frac{\sin v}{2} = \frac{\sin u}{\sqrt{d^2+25}} \qquad (2)$$

Vi löser ut sin *v* i (2) och sätter in uttrycket för sin *u*

Vi får då slutligen:

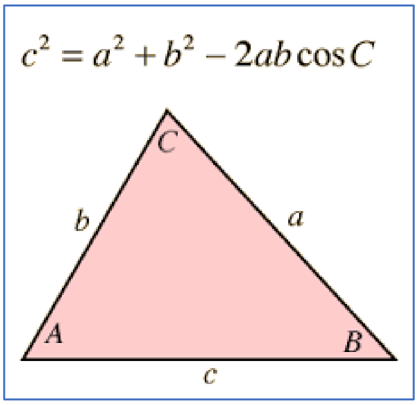
$$\sin v = \frac{2d}{\sqrt{d^2+25}\cdot\sqrt{d^2+49}}$$

Plotta nu detta uttryck som vi gjorde med tangens och beräkna numeriskt det maximala värdet på sin *v*. Beräkna sedan maxvinkeln *v*.

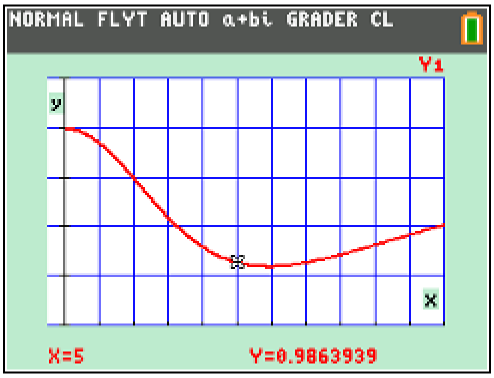
Gör också en exakt beräkning med derivata.

Ett tredje sätt

Nu har vi visat två metoder för att lösa problemet, en med tangens och en med sinus. **Använd nu *cosinussatsen* för att lösa problemet. Se figur nedan.**



Här har vi en graf som visar hur cos *v* beror av avståndet *d*!



Nu har vi alltså mer eller mindre löst uppgiften på två sätt. För det tredje sättet har vi bara antytt lösningen. Med den första metoden så fick vi använda en formel för $\tan(\alpha-\beta)$ men det är knappast en formel man har i huvudet. I det andra fallet fick man använda sinussatsen för att komma vidare.

Svårt att säga vilken metod som ligger närmast till hands. Man kan dock alltid säga att uppgifter be-rikas om man kan visa på flera sätt att angripa problemet.