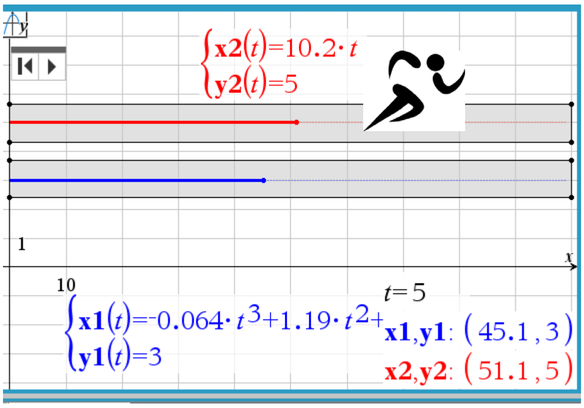
Visa och analysera rörelse



I en annan aktivitet – *Världsrekordlopp 100 m* – så analyserade vi löparens hastighet och acceleration under loppet. I senare versioner av TI-Nspire™ CX kan man nu *animera* löparens framfart under loppet. Man skriver då sina ekvationer i *parameterform*. Vi tar upp några tillämpningar på detta i aktiviteterna.

- Visa och analysera rörelse-inledning
- Visa och analysera rörelse-fartygsrörelser
- Visa och analysera rörelse-kasta boll mot ett pariserhjul

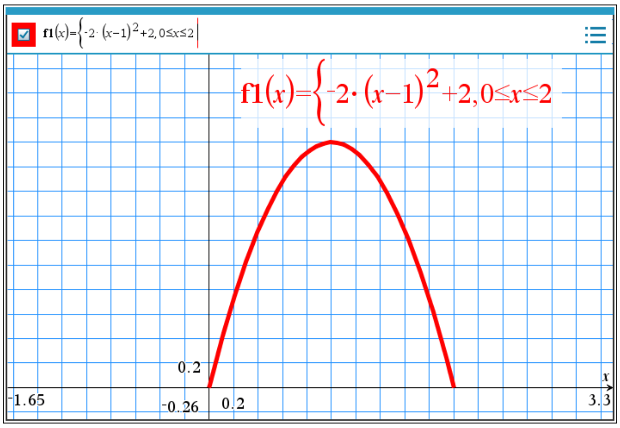
är exempel på lite mer omfattande aktiviteter. *Tanken är att du som lärare får bra underlag och eventuellt lite inspiration till lite mer omfattande uppgifter till eleverna. Aktiviteten kräver kunskaper på matematik 4-nivå och eleverna bör också ha studerat kroklinjig rörelse i fysik.*

Vi visar här på lite olika möjligheter vid grafritning. Vi tar upp några hyfsat verkliga modeller för rörelse från fysiken. Här behandlas både rätlinjig och kroklinjig rörelse och jämsides med olika grafiska representation finns också många beräkningar med och utan CAS-verktyg. Det ges här möjligheter för eleverna att syssla en hel del med symboliska beräkningar med CAS-systemet hos TI-Nspire.

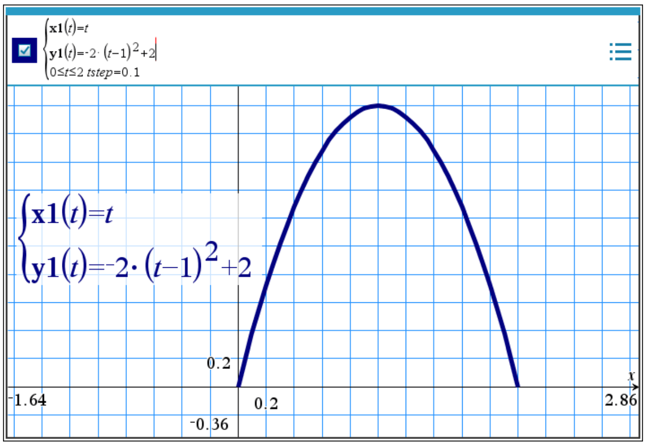
Inställning i läget parameterform är på många sätt en generalisering av det ”vanliga” funktionsläget. I stället för att skriva *y* som en funktion av *x* så skriver man både *x* och *y* som en funktion av en *parameter t* (därav namnet parameterform). Uttryck i funktions-läge är egentligen ett speciellt fall av parameter-ekvationer. Om du ställer in $x(t)=t$ och $y(t) = f(t)$ motsvarar detta att skriva på formen $y = f(x)$.

Nästan varje kurva du stöter på kan uttryckas i parameterform. I matematik så kan parametern *t* vanligtvis anta alla värden från negativa till positiva oändligheten. Detta blir dock omöjligt att göra på en grafräknare eller i ett dataprogram, eftersom ekvationen aldrig skulle sluta att plottas (till skillnad från funktionsläge).

Då det finns inget enkelt sätt att kontrollera för vilka värden på t som ekvationen kommer att gå utanför skärmen så ställer man in fönstervariablerna tmin, tmax och tstep. Operativsystemet hos handenhetenn eller dataprogrammet kommer då att utvärdera parametern för varje värde från tmin till tmax med steget tstep och sedan sammanbinda de beräknade prickkoordinaterna.

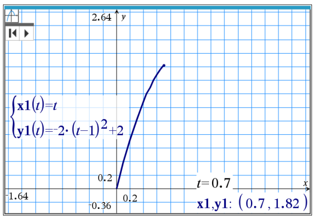


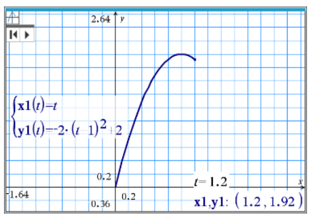
Funktionsläge. Vi har ställt in plottningsintervallet från 0 till 2.



Parameterläge. Här har vi ställt in att parametern *t* ska anta värden från 0 till 2.

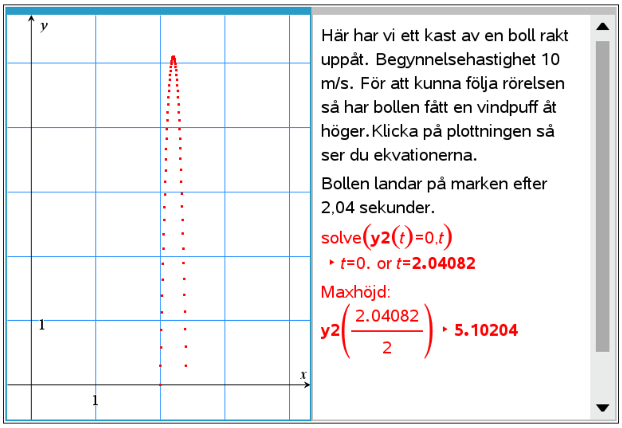
När man ritar i parameterläge så finns i version 5.0 och senare en funktion *Path Plot* där man kan animera rörelse. Se nedan. Funktionen finns i Grafappen under Spåra i verktygsmenyn. Denna funktion blir särskilt användbar när man kommer in på verkliga rörelsemodeller. I detta fall så är ju värdet på *t* och *x*-koordinaten lika hela tiden.



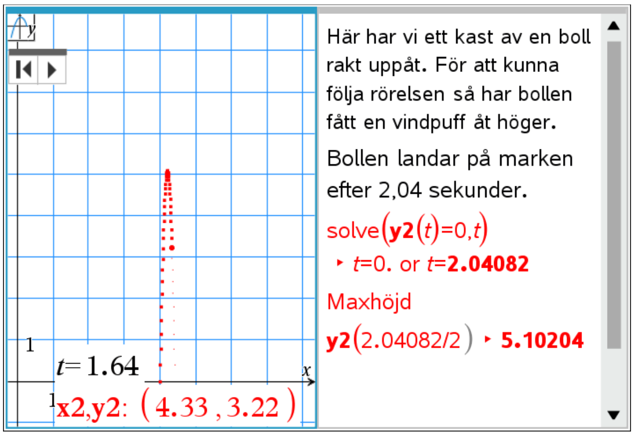


För att demonstrera detta med en realistisk modell så tanker vi oss att man kastar en boll rakt uppåt med hastigheten 10 m/s. Se nästa sida.

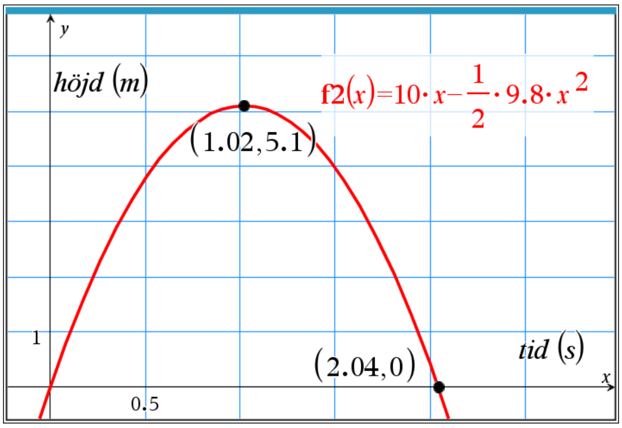
Så här ser kastkurvan ut. Man ser att avstånden mellan prickarna i kurvan blir tätare högre upp. Hastigheten minskar ju och är noll i vändpunkten. Man kan ställa in visningen på olika sätt. Vi har här valt diskret visning av kurvan, dvs vi får prickning av kurvan med pricksavståndet lika med värdet på tstep.



Vid spårning med Path Plot så ser man rörelsen och kan avläsa *x*- och *y*-koordinat och den tid som gått.



Om vi väljer att rita i *funktionsform* kan vi t. ex. plotta hur höjden hos bollen beror av tiden. Så här blir resultatet. Detta är alltså *ingen* plottning som visar bollbanan. Den visar sambandet mellan tid och höjd. *x*-axeln representerar ju tiden.



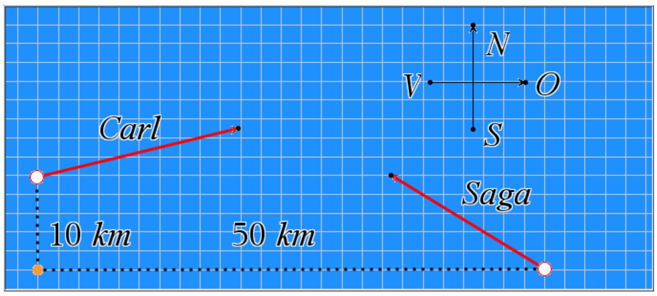
Fartygsrörelser

CREATED BY VECTORPORTAL.COM

Det första exemplet handlar om två fartyg som går på olika kurser och med olika fart. Här gäller det att kunna skriva två par av parameterekvationer som beskriver rörelsen och sedan plotta dessa rörelser.

Två fartyg, Saga och Carl, är ute på havet och går med rak kurs i den riktning som anges av pilarna. Avstånden mellan fartygen vertikalt och horisontellt visas också. På en timme förflyttar sig Carl 20 km österut och 5 km åt norr. Saga förflyttar sig 15 km västerut och 10 km åt norr.

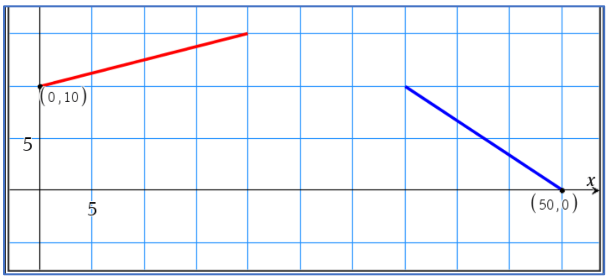
Placera nu först origo vid den gula pricken längst ner till vänster innan du börjar med beräkningar.



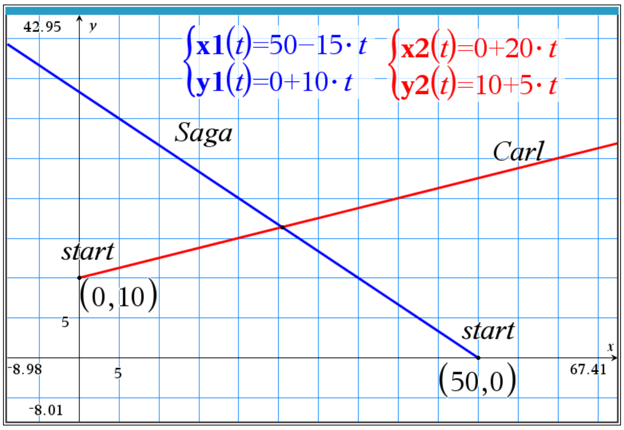
Så här lyder den första uppgiften:

a) Om fartygen fortsätter i samma riktning var skär då banorna varandra? Hur lång tid tar det för respektive fartyg att komma till den positionen. Animera rörelserna med funktionen **Path Plot**. Stämmer det med beräkningarna?

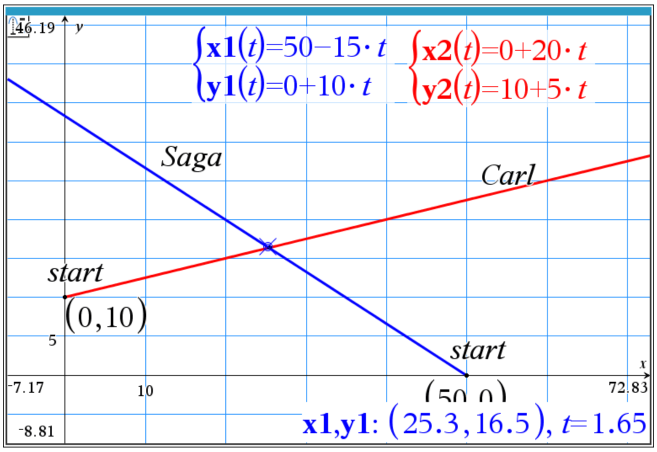
Be eleverna att ägna en stund åt att för hand rita linjer som beskriver det som är markerat med gult i uppgiftstexten på förra sidan.



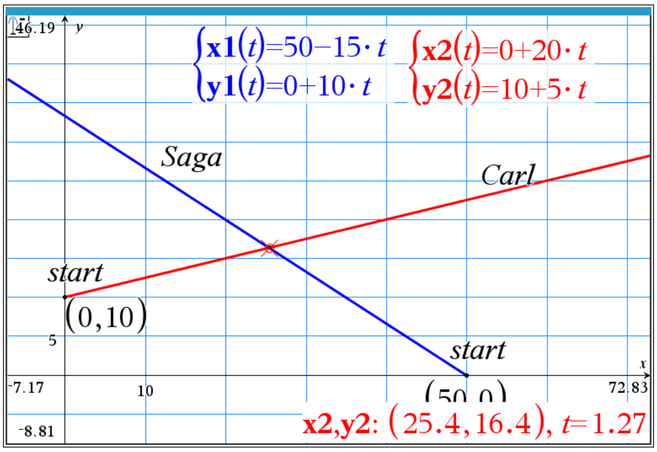
Nu kan man skriva in ekvationerna för båda fartygen. Man får här tänka på att ha ett *ortnormerat* koordinatsystem. Under Zoom i verktygsmenyn finns alternativet *kvadratiskt*.



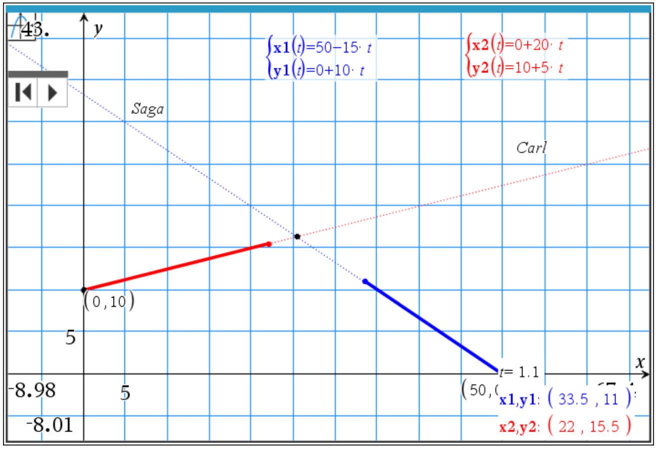
Om man spårar efter linjerna så ser man koordinaterna och tiden nederst i högra hörnet. Här har vi spårat efter fartyget Saga och efter ca 1.65 timmar så passerar Saga skärningen mellan banorna.



Om man spårar efter Carl så får man en skärning efter 1,27 timmar.



Om vi nu använder funktionen Path Plot så kan det se ut så här när vi fryser rörelserna. Vi ser koordinaterna för båda fartygen och tiden. Man kan stanna rörelserna med reglaget uppe till vänster. Man kan också stega sig bakåt och framåt i tiden med piltangenterna.



På sid 4 så gör vi beräkningar av fartygslinjernas skärningspunkt. Man *eliminerar* då först *t* i respektive parameterekvation och får då

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{100}{3} \\ y = \dfrac{x}{4} + 10 \end{cases}$$

Lösningarna blir x=280/11 och y=180/11

Man får också lätt fram ekvationerna för linjerna genom att titta på lutningar och skärningar med den lodräta axeln

Observera att när vi eliminerar t så har vi egentligen ”bara” ett vanligt ekvationssystem som visar fartygens banor men inte säger något om tiden och deras hastighet.

På denna sida gör vi beräkningarna i flera steg och utnyttjar inte TI-Nspire´s CAS-motor fullt ut.

Om vi *eliminerar t* i båda parameterekvationerna så får vi ett ekvationssystem i x och y. Vi kan då beräkna skärningspunkten för fartygens banor. Gör elimineringen för hand för båda ekvationerna.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y=\dfrac{-2}{3}\cdot x+\dfrac{100}{3} \\ y=\dfrac{x}{4}+10 \end{cases}, \{x,y\}\right) \blacktriangleright x=\frac{280}{11} \text{ and } y=\frac{180}{11} \text{ (avrundat}$$

x= 25,5 och y=16,4)

Det betyder att för Carl gäller ekvationen 280/11= 0+20t som ger $t=\frac{14}{11} \approx 1{,}27$ **h.** För Saga 280/11=50−15t som ger $t=\frac{18}{11} \approx 1{,}64$ **h.**

Carl hinner alltså fram snabbare till skärningspunkten än Saga. Observera alltså att de *inte* möts där. Vi ska ju också räkna ut hur avståndet varierar med tiden.

Diskutera också andra sätt att beräkna tiderna med eleverna. Nedan har vi gjort beräkningarna genom att utnyttja avståndslagen. Vi har här att t=sträcka/hastighet. Visa gärna beräkningarna på de två närmaste skärmarna om du vill. Får betraktas som fördjupning.

Saga:

$$\frac{\sqrt{\left(50-\frac{280}{11}\right)^2+\left(0-\frac{180}{11}\right)^2}}{\sqrt{15^2+10^2}} \blacktriangleright \frac{18}{11}$$

Carl:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{280}{11}-0\right)^2+\left(\frac{180}{11}-10\right)^2}}{\sqrt{20^2+5^2}} \blacktriangleright \frac{14}{11}$$

På denna sida gör vi alla beräkningar på en gång genom att lösa ett ekvationssystem med fyra obekanta. Observera att vi löser systemet för två tider, t1 och t2.

Vi kan också göra alla beräkningarna på en gång med TI-Nspire´s CAS-verktyg. Man väljer då ekvationssystem bland verktygen.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} x=50-15\cdot t1 \\ y=0+10\cdot t1 \\ x=0+20\cdot t2 \\ y=10+5\cdot t2 \end{cases}, \{x,y,t1,t2\}\right)$$

$$\blacktriangleright x=\frac{280}{11} \text{ and } y=\frac{180}{11} \text{ and } t1=\frac{18}{11} \text{ and } t2=\frac{14}{11}$$

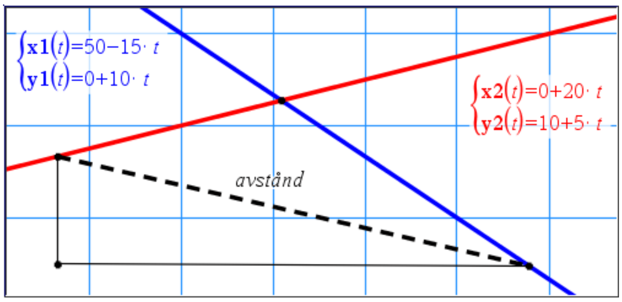
Tryckning på Ctrl och enter samtidigt ger ett approximativt resultat:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} x=50-15\cdot t1 \\ y=0+10\cdot t1 \\ x=0+20\cdot t2 \\ y=10+5\cdot t2 \end{cases}, \{x,y,t1,t2\}\right)$$

▸ x=25.4545 and y=16.3636 and $t1$=1.63636 and $t2$=1.27273

På sid 6 kommer nu beräkningen av avståndet mellan fartygen. Från början är avståndet

$\sqrt{10^2+50^2}$ km ≈ 51 km



Gå noga igenom med eleverna hur man skriver in uttrycket för avståndet mellan fartygen. TI-Nspire förenklar uttrycket direkt.

Vi räknar nu ut avståndet mellan fartygen med ***avståndslagen:***

$$\sqrt{(50-15\cdot t-(0+20\cdot t))^2+(0+10\cdot t-(10+5\cdot t))^2}$$

$$\blacktriangleright\ 5\cdot\sqrt{2\cdot(25\cdot t^2-72\cdot t+52)}$$

Nu ska vi beräkna det *minsta* avståndet mellan fartygen. Vi definierar först avståndsfunktionen:

Define funkx$=5\cdot\sqrt{2\cdot(25\cdot x^2-72\cdot x+52)}$ ▸ *Klar*

Beräkning av funktionens derivata och nollstället för derivatan

$$\frac{d}{dx}(\text{funkx}) \blacktriangleright \frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot(25\cdot x-36)}{\sqrt{25\cdot x^2-72\cdot x+52}} \quad \text{solve}\left(\frac{d}{dx}(\text{funkx})=0,x\right) \blacktriangleright x=\frac{36}{25}$$

Forts nästa sida!

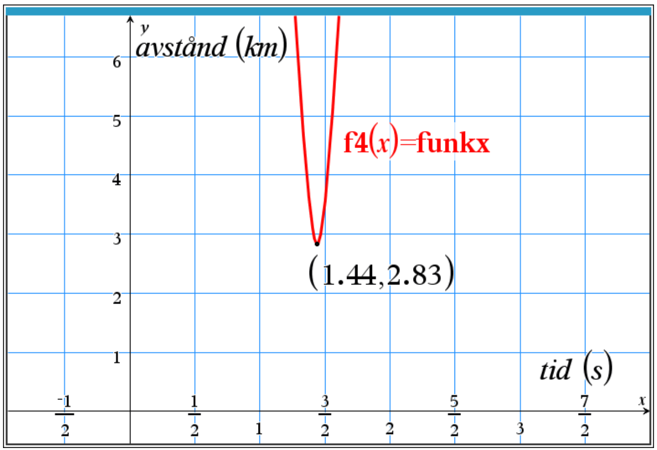
Innan vi löser ekvationen ovan ser vi att derivatan är noll när x=36/25. Der räcker med att titta på när täljaren är noll.

Beräkning av minsta avståndet:

$$5\cdot\sqrt{2\cdot(25\cdot x^2-72\cdot x+52)}\,|x=\frac{36}{25} \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{2}$$

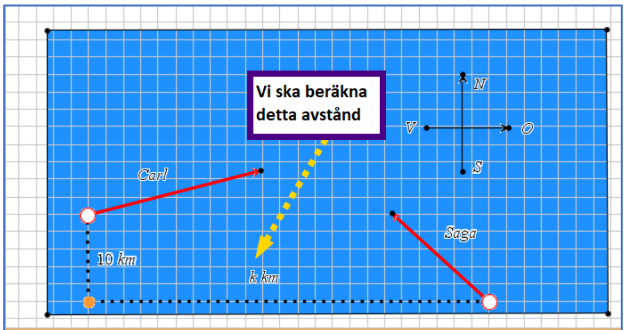
Det minsta avståndet mellan fartygen är efter **36/25 h** (ca 1,44 h eller 1 h 26 minuter). Avståndet mellan fartygen är då $2\cdot\sqrt{2}$ km. På nästa sida har vi gjort en grafisk/numerisk lösning.

Man behöver inte använda derivatan för att beräkna funktionens minsta värde. I kurs 2 som tar man upp metoden med kvadratkomplettering i samband med behandling av andragradsfunktioner.



Vi gör nu en grafisk/numerisk lösning genom att plotta funktionen funkx och numeriskt beräkna minsta värdet.

I Problem 2 ska vi nu beräkna ett begynnelseavstånd horisontellt för fartyget Sara som gör att fartygen träffar på varandra på havet. Deras farter är desamma som i problem 1.



Pröva nu att finna ett begynnelseavstånd horisontellt till origo för Saga som gör att fartygen anländer till samma plats *samtidigt*. Se figur ovan.

Om man nu sätter in *k* istället för 50 i uttrycket för avståndet så får man

$$\sqrt{(k-15x-(0+20x))^2+(0+10x-(10+5x))^2}$$

Detta uttryck förenklas nu till

$$1250x^2+(-70k-100)\cdot x+k^2+100$$

Vi bryr oss nu inte om rottecknet utan tittar närmare på det som står inne i rottecknet. Nu kommer den gamla *pq-formeln* till användning.

I uttrycket för avståndet sätter vi nu in ***k*** som det okända avstånd som vi ska försöka beräkna. För det som står **under rottecknet i avståndsuttrycket** får vi då:

$$(k-15\cdot x-(0+20\cdot x))^2+(0+10\cdot x-(10+5\cdot x))^2$$

$$\blacktriangleright\ 1250\cdot x^2+(-70\cdot k-100)\cdot x+k^2+100$$

Om vi sätter uttrycket ovan till noll och använder pq−formeln får vi uttrycket nedan:

$$x=\left(\frac{70\cdot k+100}{2500}\pm\sqrt{\left(\frac{70\cdot k+100}{2500}\right)^2-\frac{k^2+100}{1250}}\right)$$

Forts nästa sida

För vilket värde på *k* har funktionen ett ***dubbelt*** nollställe? Jo, när uttrycket under rottecknet ovan är noll. Vi löser då ekvationen nedan med TI−Nspire´s CAS−verktyg *solve*.

$$\text{solve}\left(\left(\frac{70\cdot k+100}{2500}\right)^2-\frac{k^2+100}{1250}=0,k\right) \blacktriangleright k=70$$

Fundera över varför vi undersöker vilket värde som *k* ska ha för att uttrycket under rottecknet ovan ska bli noll.

Uttrycket för avståndet innehåller ju både x (tiden) och parametern k. Vi sätter alltså uttrycket till noll och löser enligt *pq*-formeln. Det intressanta är ju detta med dubbelt nollställe. Det beror ju på att det minsta avståndet ska vara *noll* för ett visst värde på *k*.

Här förenklar vi nu uttrycket på förra sidan i flera steg med ett antal CAS-verktyg. Att lösa denna ekvation för hand är en bra deluppgift för eleverna. Ta bort denna sida då.

Nu gör vi beräkningen"för hand":

1. Utveckling (förenkling) av uttrycket under rottecknet med funktionen expand (utveckla)

$\text{expand}\left(\left(\frac{70\cdot k+100}{2500}\right)^2-\frac{k^2+100}{1250}\right) \blacktriangleright \frac{-k^2}{62500}+\frac{7\cdot k}{3125}-\frac{49}{625}$

2. Vi vill ha en gemensam nämnare. Vi använder då funktionen *comDenom*

$\text{comDenom}\left(\frac{-k^2}{62500}+\frac{7\cdot k}{3125}-\frac{49}{625}\right) \blacktriangleright \frac{-k^2+140\cdot k-4900}{62500}$

3. Vi löser nu ekvationen $k^2-140k+4900=0$ med pq-formeln

$k=70\pm\sqrt{4900-4900} \blacktriangleright k=70$

Här är nu slutklämmen på uppgiften. I grafönstret har vi även lagt in avståndsfunktion med en parameter *s* och ett skjutreglage för parametern.

Vid förenklingen av uttrycket för avståndet så visas det med absolutbeloppstecken. Repetera upp definitionen av absolutbelopp med eleverna:

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & \text{om } x\geq 0\\ -x, & \text{om } x<0.\end{cases}$$

I aktiviteten *Kvadratrötter-problem med* studerar vi detta närmare.

Nu sättter vi in värdet på k i avståndsformeln och förenklar:

$\sqrt{1250\cdot x^2+(-70\cdot 70-100)\cdot x+70^2+100} \blacktriangleright 25\cdot\sqrt{2}\cdot|x-2|$

Uttrycket ovan med absolutbeloppstecken kan också skrivas

$\sqrt{1250\cdot(x-2)^2}$

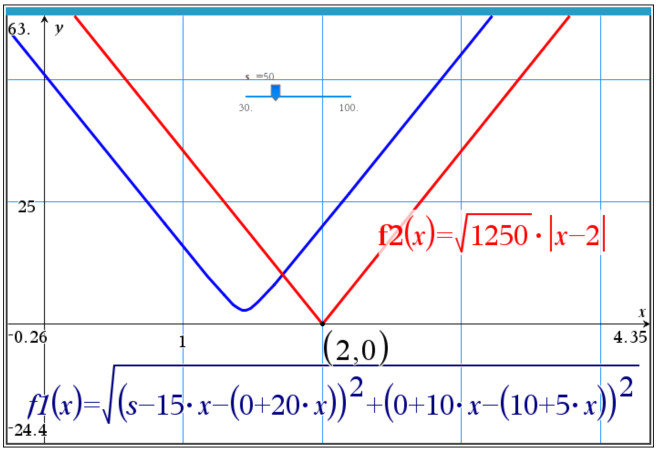
Vi ser att det dubbla nollstället är x=2.

Efter 2 timmar så möts alltså fartygen, förhoppningsvis utan kollision.

Till vänster har vi lagt in en graf (i rött) för uttrycket ovan och vi ser att funktionen har ett nollställe för x=2.

Den blå grafen är avståndskurvan med en parameter s. Variera värdet genom att dra i skjutreglaget. När s=70 sammanfaller kurvorna. I problem 1 var s=50. *Se graferna på nästa sida!*

Se graferna på nästa sida. Dra alltså i skjutregaleget så att s =70.

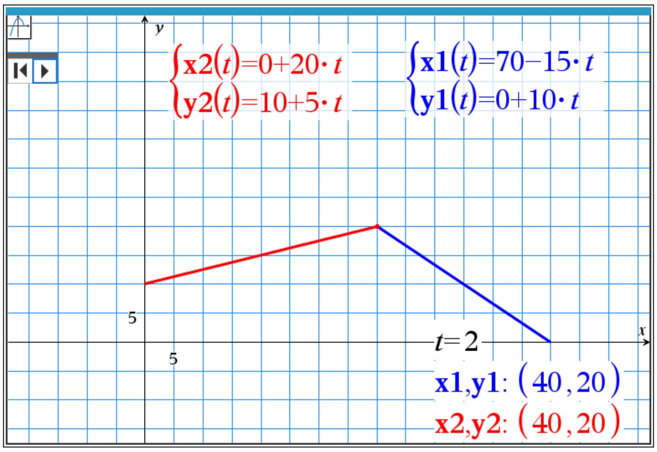


Nu kan vi plotta upp och titta på rörelserna hos de två fartygen. Vi har ju redan räknat ut att de ska mötas efter 2 sekunder om ett visst begynnelseavstånd är 70 km.

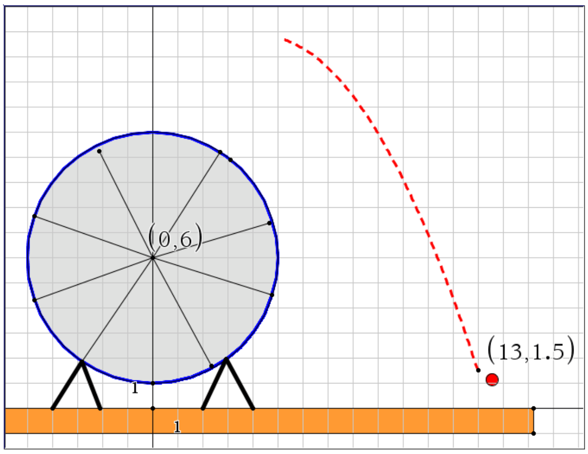
Avslutningsvis så plottar vi nu parameterekvationerna och med ett speciellt verktyg ska vi titta på hur fartygen rör sig. Man ställer innan eller efter att man plottat in ett bra fönster där en enhet är lika lång i x– och y–led. Man vill ju visa den *verkliga* rörelsen.

Man väljer sedan **Path Plot** bland Spåra–verktygen. Klickar sedan på ▶. Nu plottas rörelserna med en steglängd (i tid) som man själv kan bestämma med Path Setup.

0,1 sekund är lagom här. Man kan använda piltangenterna (Pil vänster eller Pil höger) för att backa eller gå framåt när rörelsen avstannat.



Kasta boll på tivoli



Nästa exempel handlar om två icke rätlinjiga rörelser. Så här lyder texten till uppgiften:

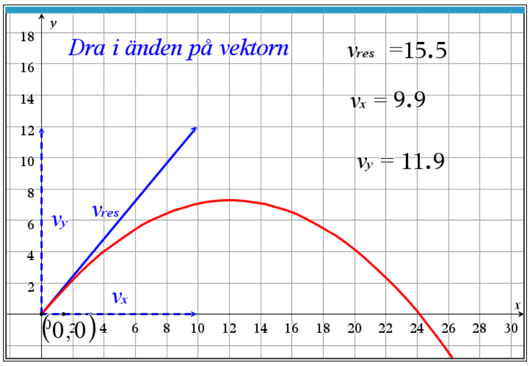
Vi befinner oss på ett tivoli. En av attraktionerna är när matematikern Albert kastar en boll till kollegan Ada som åker runt i ett pariserhjul. Albert kan konsten att med lämplig fart och kastvinkel få Ada att fånga bollen. Se illustrationen ovan.

Albert kastar bollen på det horisontella avståndet 13 m från pariserhjulet. Hjulets centrum har koordinaterna (0, 6) och dess diameter är 10 meter.

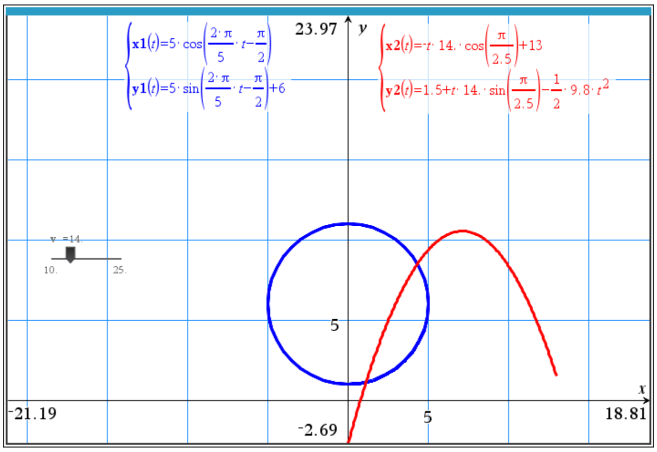
Ett varv på pariserhjulet tar 5 sekunder och Ada startar i hjulets lägsta punkt. Albert kastar bollen i 72 graders vinkel och på 1,5 meters höjd med en viss hastighet v m/s. Denna hastighet ska vi försöka komma fram till.

Eleverna ska nu modellera rörelserna hos bollen och Ada som far runt i pariserhjulet. De ska följa rörelserna och se hur nära Ada kommer den kastade bollen. D et gäller att finna en hastighet så att avstån-det mellan bollen och Ada är så litet som möjligt.

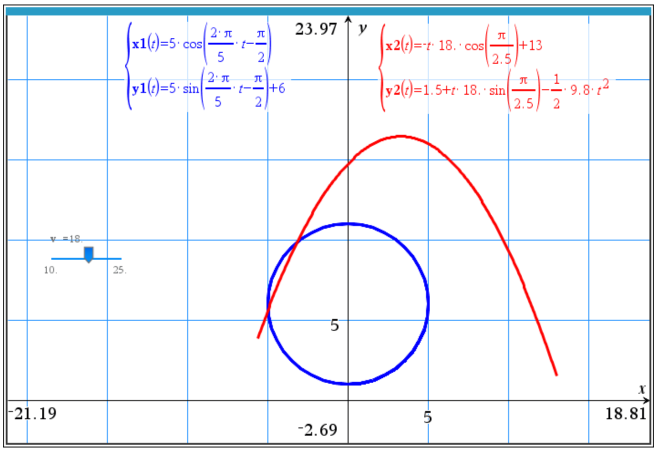
Eventuellt kan man förbereda sig för denna aktivitet och studera ekvationerna för kroklinjig rörelse ordentligt. Aktiviteten *Kaströrelse* ger en grundlig introduktion.



På sid 4 har vi nu graferna för de två parameter-uttrycken. *Den matematiska utmaningen i denna aktivitet är att kunna skriva korrekta ekvationer. Gå igenom detta och se till att eleverna verkligen hänger med här.*



v = 14 m/s



v = 18 m/s

Ovan visar vi hur kastbanan blir vid några olika hastigheter.

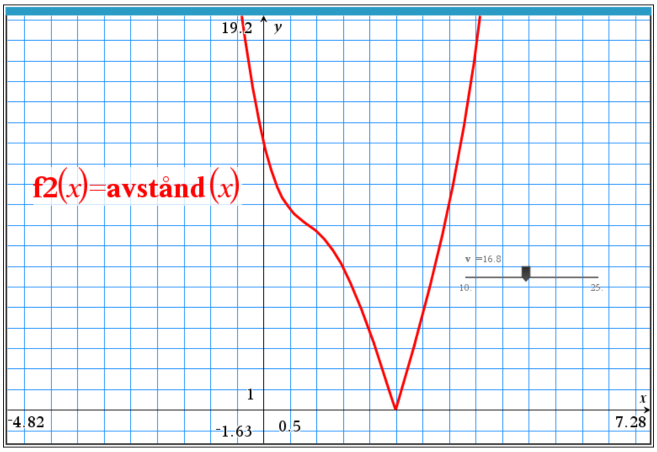
Här definierar vi avståndfunktionen och på sidan efter själva grafen där vi har ställt in värdet på v så att vi minimerar avståndet.

Nu definierar vi avståndsfunktionen och vi gör det som en vanlig funktion. *x* står här för tiden.

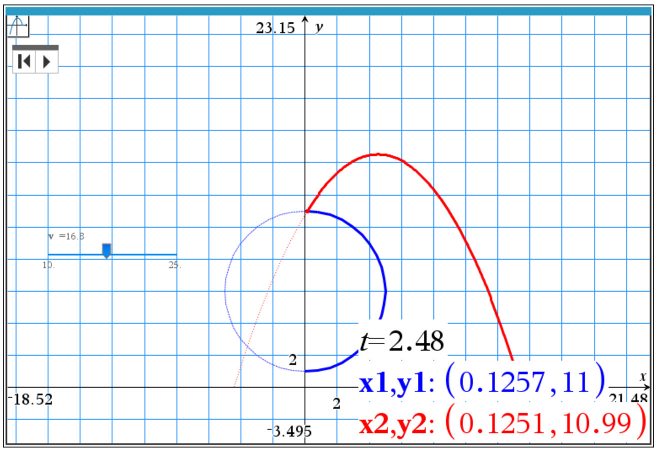
Define $\text{avstånd}(x)=\sqrt{(x1(x)-x2(x))^2+(y1(x)-y2(x))^2}$

Vi ställer in värdet på ***v*** i skjutregaget nedan så att funktionsvärdet hamnar *så nära* 0 som möjligt. Efter hur lång tid blir Ada antagligen träffad av bollen?

Pröva nu också att köra Path Plot med inställningen ovan på v. Stanna animeringen där Ada blir träffad av bollen.



Med Path Plot så gör man sedan *animeringen*. Nere till höger på skärmen ser man koordinaterna för Ada och bollen och förfluten tid.



När man hittat ett optimalt avstånd kan man göra en animering med detta värde.