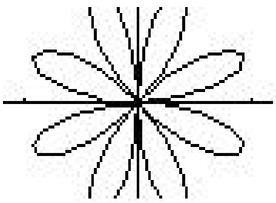
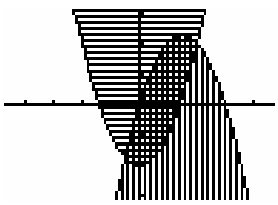
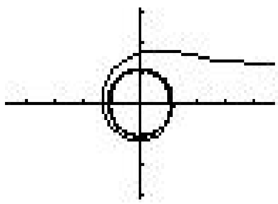
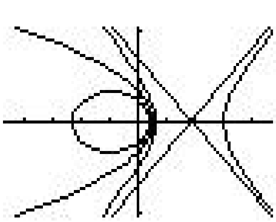
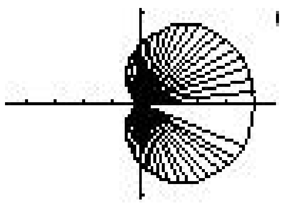
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 14

Voorbeelden met de TI-84+ uit de Analyse

Uitgewerkte voorbeelden voor de 3de graad ASO

Didier Deses

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Voorwoord

Dit Cahier is bedoeld als inspiratiebron voor leerkrachten.

Inhoudelijk staan er een groot aantal opdrachten in, met als centraal thema de leerstof analyse van de 3de graad ASO. Ze zijn hoofdzakelijk gericht naar leerlingen uit de wetenschappelijke richtingen, maar kunnen mits eventuele aanpassingen ook gebruikt worden in andere klassen. De opdrachten werden met oog op de praktijk gekozen. De meesten kunnen probleemloos ingelast worden in de lessen analyse, als oefening of als voorbeeld en werden reeds in echte klassituaties getoetst. Bij de opdrachten staat telkens het betrokken onderwerp erbij vermeld, deze zijn ook terug te vinden in de index achteraan, samen met alle toetsen en menu's van de **TI-84+** die gebruikt worden in deze bundel. Na elke opdracht wordt een mogelijke oplossingswijze behandeld waarbij de **TI-84+** ten volle benut wordt. Sommige opdrachten kunnen als inspiratie dienen voor de onderzoekscompetenties, gewoon als voorbeeld, als implementering van ICT of als oefening. Het is aan de leerkracht om te zien wat hij met zijn klas kan behandelen en op welke manier.

De verschillende hoofdstukken bevatten opdrachten die gaandeweg iets moeilijker worden.

Er wordt eerst een zeer bondige inleiding gegeven over het gebruik van de **TI-84+** in de analyse, onmiddelijk gevolgd door de meest eenvoudige oefeningen.

Bij de "iets moeilijkere" opdrachten staan de meeste klassiekers alsook oefeningen met de **TI-84+** die in de meeste klassen kunnen behandeld worden en erop gericht zijn om tegelijkertijd inzicht te geven en leuke voorbeelden te bieden. Er zijn tevens een aantal oefeningen opgenomen die met de **TI-84+** een fluitje van een cent lijken, maar die wiskundig wel wat meer in hun mars hebben.

In het volgende hoofdstuk worden de opdrachten "nog iets moeilijker". De eerste paragraaf echter bevat zeer eenvoudige oefeningen, maar is bedoeld om inzicht te geven op de wijze waarop grafische rekenmachines werken. Rekenmachines zijn immers een van de meest succesvolle toepassingen van de wiskunde. Deze paragraaf is essentieel voor het verantwoord gebruiken van de **TI-84+** (of een ander grafisch rekentoestel). Hierna volgt een korte introductie over het programmeren van een **TI-84+** samen met enkele eenvoudige programma's. De laatste paragraaf toont hoe ver men eigenlijk wel kan gaan dmv een beetje programmeren op de **TI-84+** .

Het laatste hoofdstuk tenslotte, bevat een beschrijving van een aantal applicaties voor de **TI-84+** die soms wel handig kunnen zijn tijdens de lessen analyse.

Neem nu maar uw **TI-84+** ter hand. Veel lees- en oefenplezier!

Inhoudsopgave

1 Inleiding **4**

2 Eenvoudige opdrachten **7**

3 Iets moeilijkere opdrachten **12**

3.1 Standaardoefeningen 12

3.2 Andere coördinatensystemen 17

3.3 Te gemakkelijk met de **TI-84+** ! 23

4 Nog iets moeilijker ... **28**

4.1 Hoe werkt de **TI-84+** ? 28

4.2 In TIBasic programmeren is eenvoudig. 35

4.3 Met een beetje programmeren 42

5 Enkele `app's` **48**

5.1 Een `app` overbrengen 48

5.2 `Polysmlt` 49

5.3 `Transfrm` 50

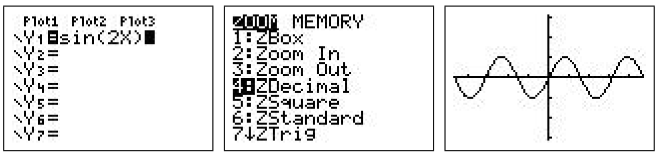
5.4 `Conics` 51

Hoofdstuk 1

Inleiding

We zullen regelmatig dingen intikken op de **TI-84+** *. We gebruiken hier* `y=` *om een knop aan te duiden en* `2nd` `[calc]` *om een keuze aan te duiden die met behulp van de* `2nd` *knop kan worden gevonden. De notatie* `math` `[fmax]` *gebruiken we dan weer om een selectie uit een menu te maken. Zo vind je bijvoorbeeld onder* `2nd` `[angle]` `[dms]` *het commando om hoeken om te zetten van radialen naar graden, minuten en seconden. Soms zullen we ook de opeenvolgende stappen op de* **TI-84+** *geven door 'screenshots'. Deze moeten dan gelezen en uitgevoerd worden op de manier van een stripverhaal: van links naar rechts en van boven naar onder.*

De meeste nuttige functies die kunnen dienen in de lessen analyse van de derde graad kunnen worden verkregen via het menu `2nd` `[calc]` nadat je een grafiek hebt gemaakt. Dit doe je als volgt. Via `y=` kun je één of meerdere functievoorschriften ingeven. Daarna druk je op `graph` om de grafiek te maken, of je gebruikt een keuze uit `zoom`. **Let op!** De beste keuze is waarschijnlijk `[zdecimal]`, omdat deze ervoor zorgt dat je een orthonormaal assenstelsel krijgt.



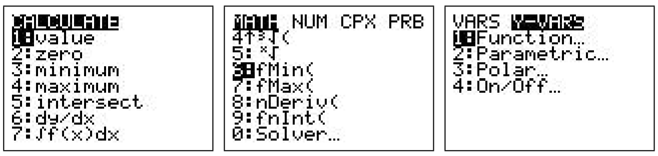
Zoals eerder gezegd kun je nu via `2nd` `[calc]` aan verschillende nuttige ingebouwde functies geraken.

`2nd` [calc]	
[value]	om functiewaarden te bepalen
[minimum],[maximum]	om minima of maxima te benaderen
[intersect]	om het snijpunt tussen twee krommen te benaderen
[dy/dx]	om de afgeleide in een punt te benaderen
[$\int$ f(x)dx]	om een bepaalde integraal te benaderen

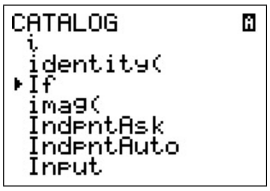
Het is goed om weten dat verschillende van deze functies ook via het menu `math` bereikbaar zijn.

`math`	
[fmin], [fmax]	om minima of maxima te benaderen
[nderiv]	om numeriek de afgeleide in een punt te benaderen `nderiv(functie, variabele, punt)`
[fnint]	om numeriek een bepaalde integraal te benaderen `fnint(functie, variabele, ondergrens, bovengrens)`

Deze zijn echter iets moeilijker en uitgebreider in het gebruik. We beperken ons hier tot het gebruik van `[nderiv]`. Wij zullen dit enkel benutten om in sommige gevallen het afgeleid getal in een punt te berekenen. De syntax is dan `nderiv(functie,variabele,punt)`. We zullen gebruik maken van bijvoorbeeld `nderiv(Y1(X),X,2)` waarbij `Y1` de functie is die via `y=` ingevoerd kan worden. `Y1` kun je via `vars` `[y-vars]` `[function...]` intypen.



Als je een commando niet meer terugvindt in het bos van de verschillende menu's, gebruik dan `2nd` `[catalog]`. Je krijgt hier een volledige lijst van alle commando's die de **TI-84+** kent. Door de beginletter te drukken ga je onmiddellijk naar alle commando's die met deze letter beginnen. Een ander zeer nuttige truc is de `app` `[ctlghelp]`. Eenmaal opgestart (en na een opstart scherm van de **TI-83**!) zal deze `app` je toelaten om in elk menu of in de `[catalog]` op `+` te drukken, je krijgt dan een bondig overzicht van de parameters die de geselecteerde functie verwacht.


CATALOG
i
identity(
If
imag(
IndentAsk
IndentAuto
Input

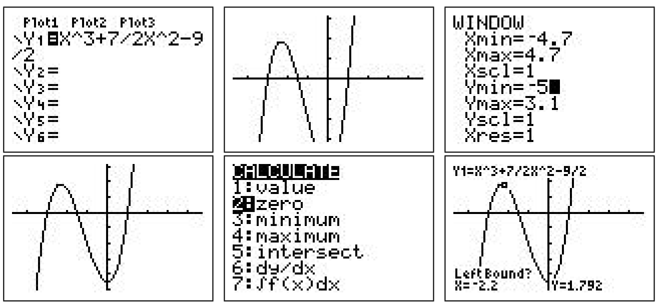

If
:If condition:commandA(cond=true):commands
PASTE
ESC

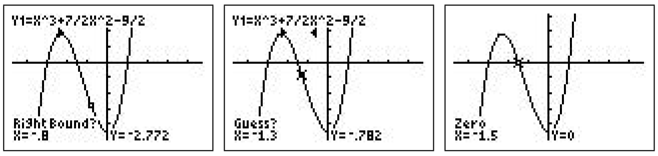
Hoofdstuk 2

Eenvoudige opdrachten

Opdracht 1. *Nulwaarden bepalen*
Soms vergt het bepalen van de nulwaarden van een veelterm inzicht en kan de **TI-84+** helpen. Maak de grafiek van de reële functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{9}{2}$. Bepaal de nulwaarden zowel manueel als met de **TI-84+** .

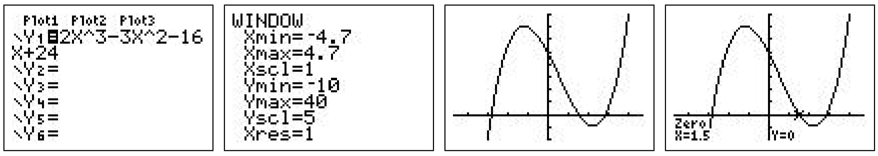
Oplossing 1. Om de nulwaarden te vinden kan men de veelterm ontbinden in factoren. Door op te merken dat de som van de coëfficiënten nul is, weten we dat de veelterm deelbaar is door $(x - 1)$. Deling of de methode van Horner geeft dan de andere factor die van de tweede graad is en kan worden ontbonden via de discriminant methode. De nulwaarden $1, -3$ en $\frac{3}{2}$ kunnen aldus gevonden worden. Met de **TI-84+** gebeurt dit als volgt. Geef het voorschrift in via `y=` en maak daarna met `zoom` `[zdecimal]` de grafiek. We moeten daarna via `window` het venster aanpassen om de volledige grafiek te zien en driemaal een nulwaarde benaderen via `2nd` `[calc]` `[zero]`.





Opdracht 2. *Ontbinden in factoren*
Soms is een veelterm moeilijk ontbindbaar en kan de **TI-84+** een grote hulp zijn. Ontbind de veelterm $2x^3 - 3x^2 - 16x + 24$ in factoren. De discriminantmethode is hier niet van toepassing en Horner niet onmiddellijk omdat er geen gehele nulwaarden zijn.

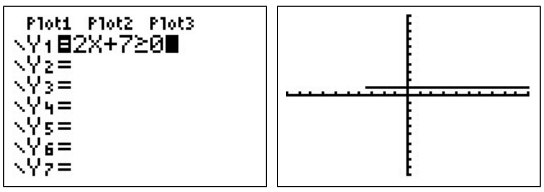
Oplossing 2. Maak eerst de grafiek in `[zdecimal]` en pas daarna via `Window` de schaal op de y-as aan tot je een mooi beeld krijgt. Via `2nd` `[calc]` `[zero]` kan je nu de nulwaarden zoeken. Eén ervan is $x = \frac{3}{2}$, controleer dit handmatig.



Pas nu Horner toe zodat je de factor $(x - \frac{3}{2})$ kan buitenbrengen. Het overgebleven deel is nu van de tweede graad en kan ontbonden worden via de discriminant methode. De uiteindelijke ontbinding is $2(x-\frac{3}{2})(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$.

Opdracht 3. *Ongelijkheden*
Los de ongelijkheid $2x + 7 \geq 0$ grafisch op in $\mathbb{R}$.

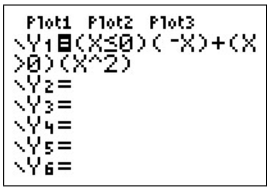
Oplossing 3. Kies via `zoom` `[zstandard]`. Gebruik `y=` en `2nd` `[test]` om de ongelijkheid op te geven en `graph` om de oplossingenverzameling grafisch te verkrijgen. De functie Y_1 krijgt nu de waarde 1 als de ongelijkheid voldaan is en 0 anders. Je bekomt de grafische oplossingenverzameling van de ongelijkheid.

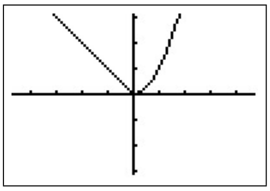


Opdracht 4. *Meervoudige voorschriften*
Maak de grafiek en onderzoek grafisch de continuïteit van

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{als } x \leq 0 \\ x^2 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

Oplossing 4. De functie wordt als volgt ingegeven.





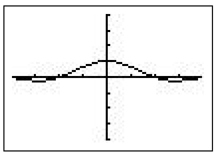
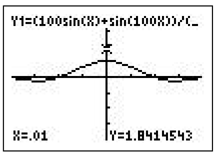
Aan de hand van de grafiek kan je inzien dat f continu is op $\mathbb{R}$.

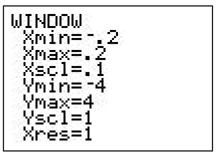
Opdracht 5. *Limieten*
Soms leidt het gebruik van de **TI-84+** tot een verkeerde conclusie. We behandelen een klassieker. Maak de grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = \frac{100 \sin x + \sin 100x}{100x}$, met de grenzen uit `zoom` `[ztrig]`. Gebruik `2nd` `[calc]` `[value]` om na te gaan welke beelden de **TI-84+** geeft voor waarden rond 0 (bijvoorbeeld $0.1, 0.01$ en 0.001). Vergelijk met de grafiek. Maak de grafiek opnieuw door via `window` de grenzen van de x-as te veranderen in `xmin=-0.2` en `xmax=0.2`. Bereken natuurlijk ook de limiet.

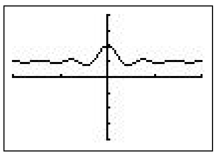
Oplossing 5. De limiet is eenvoudig te berekenen als men beschikt over $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{100 \sin x + \sin 100x}{100x} &= \lim_{x \to 0} \frac{100 \sin x}{100x} + \lim_{x \to 0} \frac{\sin 100x}{100x} \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Met de **TI-84+** bekomt men echter een grafiek waarop men zonder de grenzen aan te passen niets van het gedrag van f ziet.

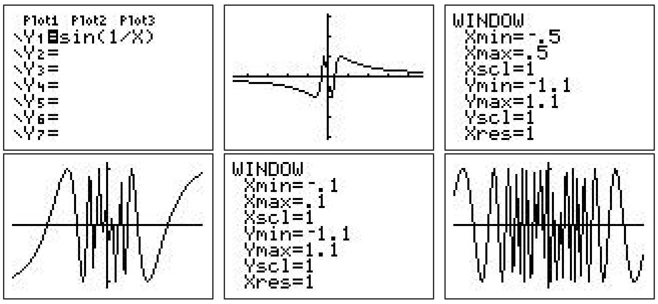







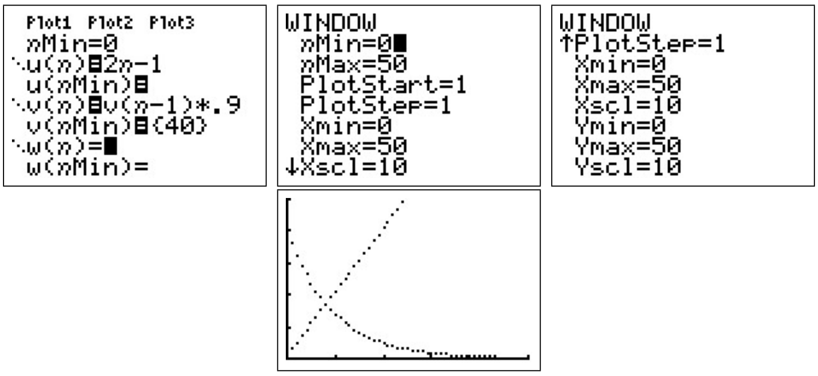
Opdracht 6. *Limieten*
De limiet $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ bestaat niet. Gebruik de **TI-84+** om grafisch te achterhalen wat er precies gebeurt.

Oplossing 6. Dit is opnieuw een klassieker. Wanneer $x \to 0$ gaat, dan zal de functie $\sin \frac{1}{x}$ steeds sneller gaan oscilleren. Met de **TI-84+** kan men tenminste dit gedrag laten zien, hetgeen zonder ICT moeilijker zou zijn.



Opdracht 7. *Rijen*
Maak de grafiek van de rijen $u_n = 2n - 1$ en $v_n = 0.9v_{n-1}$ waar $v_0 = 40$, $n \in \mathbb{N}$.

Oplossing 7. Het grafisch voorstellen van rijen gaat met de **TI-84+** als volgt. Via `mode` selecteer je `[seq]` en `[dot]`. Als je nu op `y=` drukt kun je rijen invoeren. De `[nmin]` optie laat je toe om rijen te indexeren vanaf 0 of een andere positieve waarde. Je kan rijen geven door de algemene term of door recursie. Merk op dat n verkregen wordt door `X,T,θ,n` en u, v, w door bijvoorbeeld `2nd` `[u]` (`2nd` `7`). Voor je de grafiek maakt doe je er goed aan van met `window` de gewenste grenzen correct in te stellen.

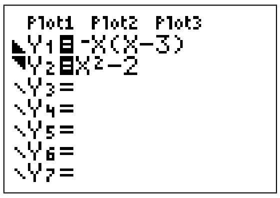


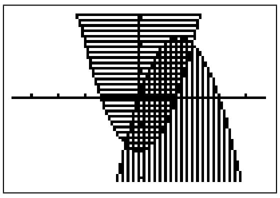
Opdracht 8. *Ongelijkheden*
Los het volgend stelsel ongelijkheden in het vlak grafisch op.

$$\begin{cases} y + x(x-3) < 0 \\ y > x^2 - 2 \end{cases}$$

Oplossing 8. Je kan op de **TI-84+** zeer eenvoudig de grafiek maken van ongelijkheden met twee onbekenden. Daarvoor herleid je de ongelijkheid naar de vorm $y > f(x)$ (of $y \leq f(x)$, …). Geef nu de functie $f(x)$ in via `y=` en gebruik het de pijltjestoetsen om het symbool voor de vergelijking te veranderen in de gewenste arcering (boven arceren = groter dan, onder arceren

= kleiner dan). Je kan dit meerdere keren doen om de grafiek van een stelsel ongelijkheden met twee onbekenden grafisch op te lossen. Bijvoorbeeld:





Hoofdstuk 3

Iets moeilijkere opdrachten

3.1 Standaardoefeningen

Opdracht 9. *Even en oneven functies*
Volgende stelling laat zien dat elke functie de som is van een even en een oneven functie.

Stelling 1. *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een functie. Stel*

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ en } f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Dan is f_e *even,* f_o *oneven en* $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$.

Bewijs deze stelling. Werk enkele voorbeelden met veeltermen uit. Van waar komt de benaming 'even' en 'oneven'? Wat gebeurt er indien f zelf al even of oneven is, bijvoorbeeld $f(x) = \sin x$ of $f(x) = \cos x$? Gebruik de **TI-84+** om de grafieken van f, f_e en f_o te maken voor een willekeurige f. Indien $f(x) = e^x$ dan is $f_e(x) = \cosh x$ en $f_o(x) = \sinh x$, maak hiervan de grafieken.

Oplossing 9. Het bewijs van de stelling is een eenvoudige verificatie. Wanneer men echter de stelling als volgt formuleert is het bewijs uitdagender en leidt vanzelfsprekend tot bovenstaande formules. Dit kan gegeven worden in de betere klassen.

Stelling 2. *Elke functie de som is van een even en een oneven functie.*

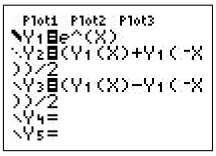
Bewijs. Stel dat $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ waarbij f_e even is en f_o oneven. Dan bekomen we:

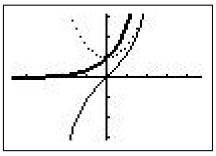
$$\begin{cases} f(x) &= f_e(x) + f_o(x) \\ f(-x) &= f_e(x) - f_o(x) \end{cases}$$

Oplossen van dit stelsel naar f_e en f_o levert de bovenstaande formules. □

Als $f(x)$ een veelterm is, dan bestaat $f_e(x)$ uit alle termen van even graad en $f_o(x)$ uit alle termen van oneven graad. Indien f reeds even is zal $f_e(x) = f(x)$ en $f_o(x) = 0$. Eenzelfde conclusie kan getrokken worden indien f oneven is.

Deze stelling door de **TI-84+** laten illustreren kan op eenvoudige wijze. Je kan `Y1` via `vars` `[y-vars]` `[function...]` intypen.

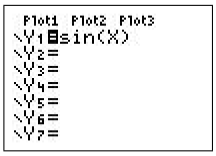


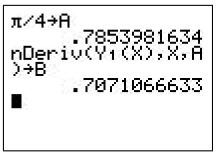


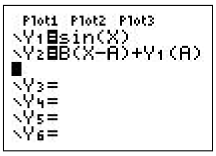
De bovenstaande aanpak laat ook toe om te spreken over sinh en cosh. Alhoewel deze functies vaak als 'vergezocht' worden betiteld hebben ze vele toepassingen bijvoorbeeld in de fysica (hangende ketting) of in de architectuur en de kunst (gewelven van Gaudi).

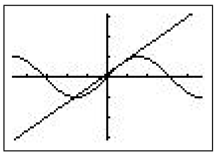
Opdracht 10. *Raaklijnen*
Bepaal aan de kromme $y = sin(x)$ de raaklijn in het punt $a = \frac{\pi}{4}$. Gebruik de **TI-84+** om de grafiek te maken.

Oplossing 10. Dit kan op verschillende manieren gebeuren. Je kan eerst de functie ingeven met `y=`, dan het afgeleid getal berekenen via `math` `[nderiv(]` in a en dan de vergelijking van de raaklijn ingeven.

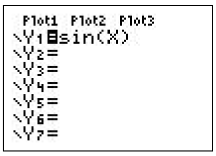


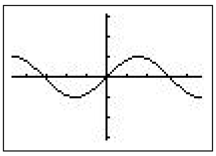


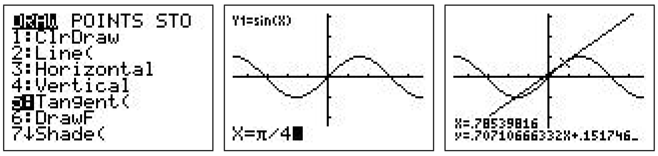




Het kan ook eenvoudiger, als het alleen maar de bedoeling is om te komen tot de grafiek. Geef met `y=` de functie in en maak de grafiek. Tik dan `2nd` `[draw]` in en kies `[tangent(]`. Je kan nu het punt op de kromme kiezen waarin de raaklijn moet worden getekend. Tik gewoonweg `2nd` `[π]` `/` `4` in. De grafiek met de raaklijn wordt getekend en de vergelijking van de raaklijn verschijnt onderaan.

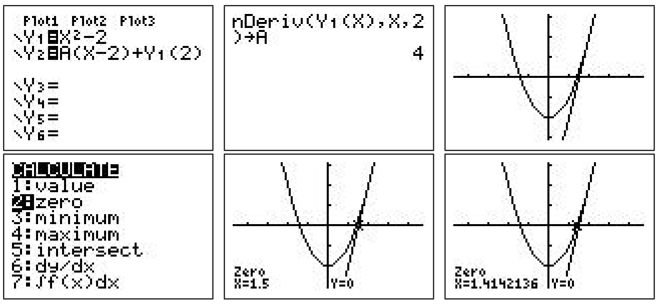






Opdracht 11. *Raaklijnen*
Men kan irrationale getallen niet schrijven onder breukvorm, toch kan men deze benaderen aan de hand van een breuk. Vandaag is dit geen probleem meer, want elk rekenmachine doet exact dit (leg uit!). Vroeger was dit echter een probleem. Eén methode gebruikte de nulwaarde van een raaklijn aan een gepaste kromme. Benader $\sqrt{2}$ door middel van de raaklijn aan $y = x^2 - 2$ in het punt $x = 2$. Deze methode kan gebruikt worden om elke $n$de machtswortel van een natuurlijk getal te benaderen. Probeer maar eens!

Oplossing 11. Indien $f(x) = x^2 - 2$ dan zijn de nulwaarden $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$. De afgeleide is $f'(x) = 2x$. De vergelijking van de raaklijn in een punt $x = a$ is dan $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, in ons geval wordt dit $y = 4(x - 2) + 2 = 4x - 6$. Het snijpunt met de x-as is een benadering voor $\sqrt{2}$. We vinden dus de waarde $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$. Met de **TI-84+** kunnen we dankzij `math` `[nderiv]` hetzelfde doen.



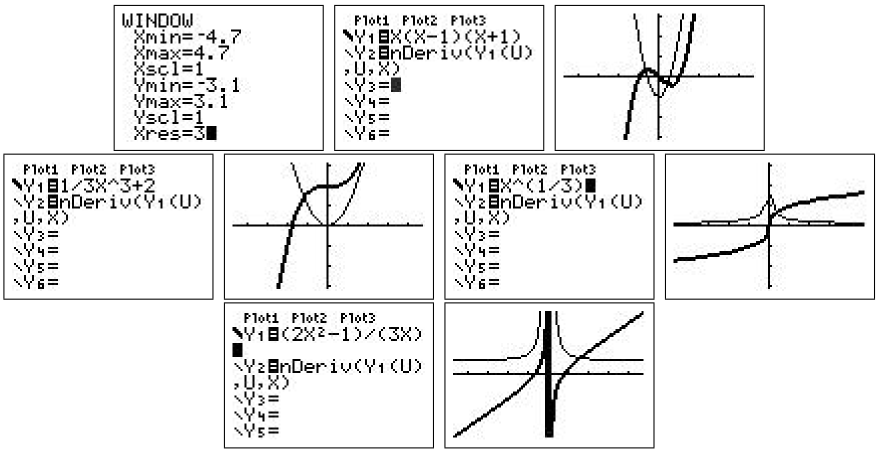
Wanneer deze methode iteratief wordt toegepast spreekt men van de Newton-Raphson methode om nulwaarden te vinden (zie opdracht 35).

Opdracht 12. *Raaklijn en normaal*
Maak een grafiek van de kromme $y = x(x-2)(x-3)$, samen met de raaklijn en normaal in het punt $(1, 2)$. Doe daarna hetzelfde in het punt $(2, 0)$. Let erop dat je `[zdecimal]` gebruikt, anders zullen de rechten niet loodrecht op elkaar staan (probeer maar eens met `[zstandard]`, leg uit hoe dit komt, zie ook verklaring 3).

Oplossing 12. De vergelijking van de raaklijn in een punt $x = a$ aan de kromme $y = f(x)$ wordt gegeven door $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ en die van de normaal door $y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$.

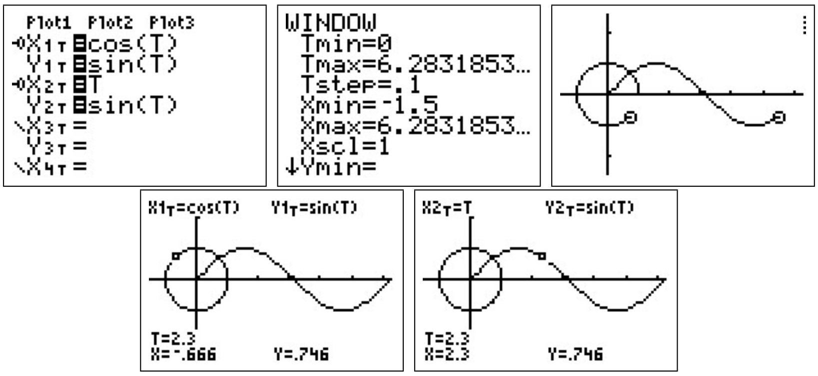
Opdracht 13. *Toepassing van afgeleiden*
Gebruik de **TI-84+** om de grafiek te maken van een functie en van haar afgeleide functie. Toon hiermee dat extrema overeenkomen met nulwaarden van oneven multipliciteit van de afgeleide functie, dat een buigpunt overeenstemt met een verandering in stijgen en dalen van de afgeleide functie en dat een schuine asymptoot overeenkomt met een horizontale asymptoot voor de afgeleide functie.

Oplossing 13. De afgeleide functie wordt numeriek bepaald door `nderiv`. Gezien dit een tamelijk rekenintensieve functie is wordt aangeraden om via `window` `xres=3` te zetten (er zal dan maar één pixel op drie uitgerekend worden).



Opdracht 14. *Goniometrische functies*
Een mooie oefening voor het begrijpen van de goniometrische cirkel en de goniometrische getallen is het maken van volgende grafieken. Stel met `mode` `[radian]`, `[simul]`, `[connected]` en `[par]` in. Voer dan de goniometrische cirkel en een van de goniometrische functies in (let op de tekenstijl). Gebruik `zoom` `[ztrig]` en stel de parameter t zo in dat die van 0 tot 2π gaat. Maak de tekening - met `enter` kun je pauzeren. Gebruik tenslotte `trace` en de pijltjestoetsen om de corresponderende punten op de goniometrische cirkel en op de goniometrische krommen te tonen.

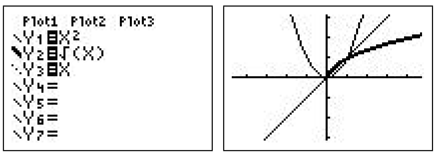
Oplossing 14. Het resultaat is een soort animatie.



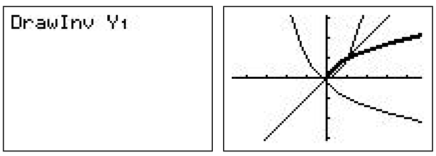
Vergeet niet om achteraf de opties via `mode` terug te zetten.

Opdracht 15. *Inverse van een functie*
Maak de grafiek van een functie en van haar inverse *functie*, bijvoorbeeld $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ of $y = \cos x$ en $y = \text{Bgcos } x$. Teken op dezelfde grafiek ook de eerste bissectrice. Hoe liggen beide grafieken tov de eerste bissectrice? Dit geldt echter slechts voor een deel van de grafiek. Gebruik `2nd` `[draw]` `[drawinv]` om de grafiek volledig te spiegelen. Je hebt nu de inverse *relatie* getekend. Is dit de grafiek van een functie? Begrijp je nu waarom men voor de inverse *functie* men het domein het bereik moet beperken?

Oplossing 15. Maak de grafieken als volgt.



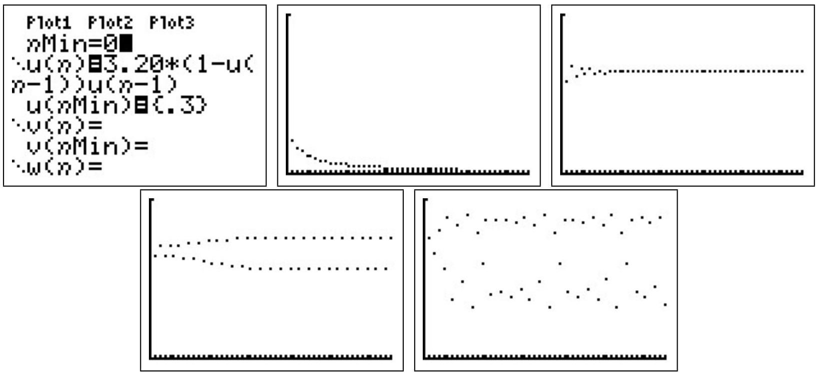
Met `2nd` `[draw]` `[drawinv]` kun je nu ook de inverse *relatie* tekenen.



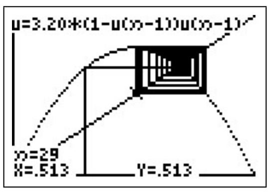
Men ziet duidelijk dat de grafiek van inverse *relatie* de spiegeling is van de grafiek van de functie tov de eerste bissectrice. In het algemeen echter is dit niet de grafiek van een functie. Indien men echter het domein en het bereik beperkt bekomt men wel de grafiek van de inverse *functie*.

Opdracht 16. *Rijen / Model van Verhulst*
Maak de grafiek van de rij gegeven door $u_n = a u_{n-1}(1 - u_{n-1})$, voor verschillende waarden van de parameter $0 < a < 4$. Maak ook een webdiagram.

Oplossing 16. De recursieve rij $u_n = au_{n-1}(1-u_{n-1})$ is in de biologie bekend als "het model van Verhulst". Voor verschillende waarden van a verandert het convergentiegedrag volledig. Voor meer info refereren we naar gepaste literatuur [1].



Om een webdiagram te maken gebruik je dezelfde rij als hierboven met bijvoorbeeld $a = 3.2$. Ga naar `window` en stel het eenheidsvierkant als grenzen voor het grafisch venster in. Ga nu naar `2nd` `[format]` en selecteer `[web]` ipv `[time]`. Als je nu de grafiek maakt met `graph` worden de krommen $y = a(1-x)x$ en de eerste bissectrice getekend. Met `trace` en de links/rechts pijltjestoetsen wordt een webdiagram gemaakt. Men ziet dat deze rij uiteidelijk in een cyclus tussen twee waarden belandt.



3.2 Andere coördinatensystemen

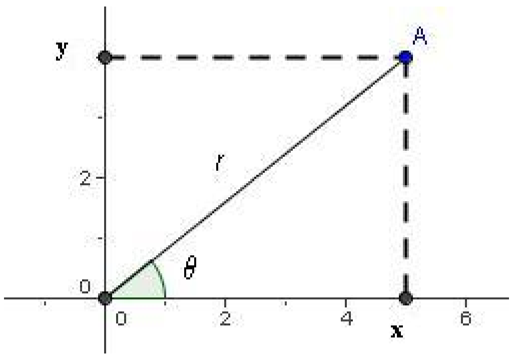
Poolcoördinaten

In de wiskunde van het ASO staat het cartesisch assenstelsel centraal. Dit komt uitvoerig aan bod in de lessen analyse, waar functies ook onder de grafische vorm $y = f(x)$ grondig worden bestudeerd. In de wetenschap (en

[1] H. A. Lauwerier, *Chaos met de Computer*, epsilon-uitgaven, 1996.

ook de wiskunde) komen echter veelvuldig andere coördinatenstelsels voor. Het is dan ook nuttig de leerlingen hiermee te laten kennismaken. We zullen hier de poolcoördinaten van dichterbij bekijken.

De poolcoördinaten hebben een meetkundige interpretatie, die gemakkelijk besproken kan worden in een hoofdstuk over de goniometrische vorm van complexe getallen. Elk punt in het vlak kan gegeven worden door coördinaten (x, y) tov een cartesisch assenstelsel of door de afstand r tot de oorsprong en de hoek θ met een vaste rechte.



De hoek θ kan genomen worden in $[0, 2\pi[$, $]-\pi, \pi]$ of zelfs $\mathbb{R}$ als men niet te nauw kijkt op de uniciteit van de coördinaten (deze is toch al om zeep omdat 0 meerdere stellen poolcoördinaten heeft). Ook functies kunnen in deze context bestudeerd worden:

Cartesische	Polair
(x, y)	(θ, r)
$y = f(x)$	$r = f(\theta)$

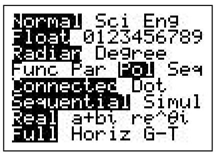
De overschakeling van polaire naar cartesische coördinaten gebeurt volgens de welbekende formules:

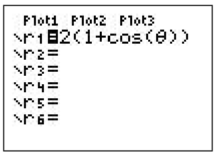
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

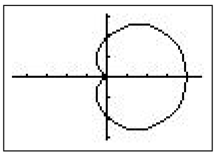
In de wetenschappen komt het vaak voor dat een kromme niet gegeven wordt onder de cartesische vorm $y = f(x)$, maar wel onder de vorm van een poolvergelijking $r = f(\theta)$. Ook hier kan de **TI-84+** helpen.

Opdracht 17. *Cardioïde*
Maak de grafiek in poolcoördinaten van de kromme $r = 2(1+\cos\theta)$. Waarom noemt men deze kromme een *cardioïde*? Heb je deze kromme al eens eerder gezien?

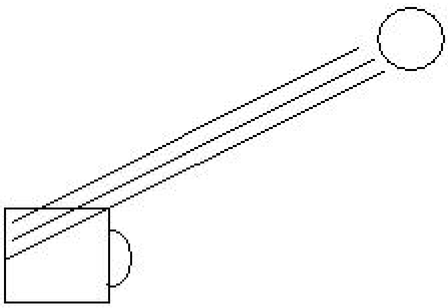
Oplossing 17. Schakel eerst via `mode` om naar `[pol]`. Als je nu op `y=` drukt, krijg je de mogelijkheid om een functievoorschrift in te geven in poolcoördinaten. De grafiek maak je door `zoom` `[zdecimal]` te gebruiken.







Deze kromme kan je dagelijks bekijken in je kopje koffie (of thee, of iets anders). Drink ze eerst leeg en hou dan het kopje op een afstand van een dertigtal cm van een lichtbron. Zorg ervoor dat het licht schuin invalt over de rand heen. De kromme die het weerkaatste licht binnen in het kopje doet verschijnen is een cardioïde.

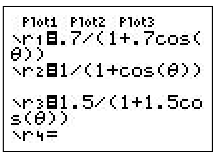


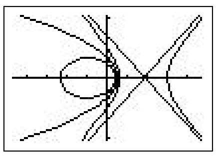
Opdracht 18. *Kegelsneden in poolcoördinaten*
Beschouw de krommen in het vlak gegeven door de poolvergelijking

$$r = \frac{e}{1 + e\cos\theta}$$

Ga de invloed van de eccentriciteit e na. Afhangend van de begeleiding kan dit onderwerp ook dienen in het kader van de onderzoekscompetenties.

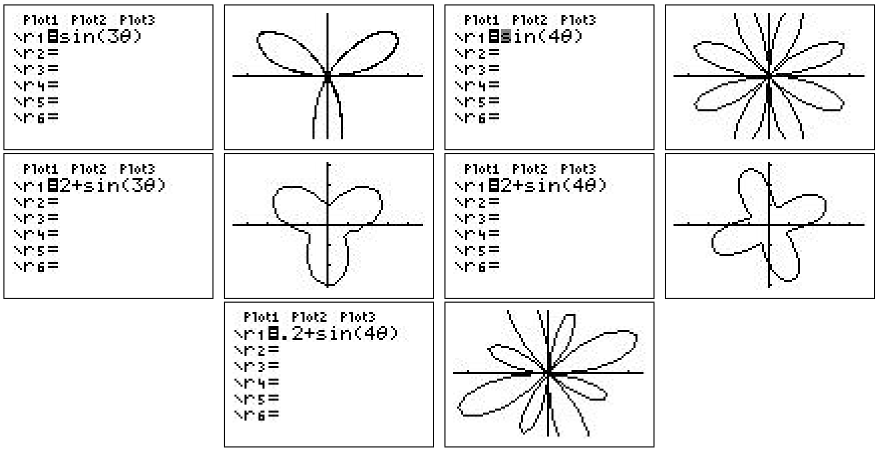
Oplossing 18. De gevraagde krommen zijn de verschillende kegelsneden. Als $0 < e < 1$ dan bekomt men een ellips, indien $e = 1$ heeft men een parabool en als $e > 1$ vind je een hyperbool.





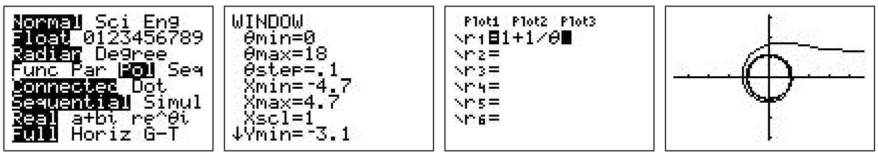
Opdracht 19. *Bloemen*
Beschouw de krommen in het vlak gegeven door de poolvergelijking $r = \sin(a\theta)$. Ga de invloed van de parameter $a \in \mathbb{N}_0$ na. Je kan dit ook veralgemenen tot bijvoorbeeld $r = b + \sin(a\theta)$.

Oplossing 19. Deze krommen worden door de leerlingen vaak herkend als "bloemetjes". Is a oneven dan zijn er a "blaadjes", is a even dan is het aantal $2a$. In het tweede geval is dit niet meer waar, de conclusie hangt af van $b < 1$ of niet. Je bekomt in deze gevallen bloemetjes met een kern ($b > 1$) of met 2 grootten van blaadjes.



Opdracht 20. *Poolcoördinaten / Asymptoten*
Gebruik de **TI-84+** om de grafiek van de kromme $r(\theta) = 1 + \frac{1}{\theta}$, $\theta \in]0, +\infty[$ (in poolcoördinaten) te maken. Bespreek het asymptotisch gedrag en tracht dit wiskundig na te gaan.

Oplossing 20. We maken eerst de grafiek met de **TI-84+** . Eerst stellen we poolcoördinaten in via `mode` `[pol]` en kiezen `zoom` `[zdecimal]`. We passen met `window` de grenzen van θ aan. We kunnen nu de grafiek maken.



Leerlingen zullen waarschijnlijk wel een horizontale asymptoot $y = 1$ herkennen voor $x \to +\infty$. Verder is er ook een "asymptotische cirkel" die zichtbaar wordt tijdens het tekenen.

Bevestiging van de horizontale asymptoot kan men krijgen door volgende limieten uit te rekenen.

$$\lim_{\theta \underset{>}{\to} 0} x = \lim_{\theta \underset{>}{\to} 0} r \cos\theta = \lim_{\theta \underset{>}{\to} 0} (1 + \frac{1}{\theta}) \cos\theta = +\infty$$

$$\lim_{\theta \underset{>}{\to} 0} y = \lim_{\theta \underset{>}{\to} 0} r \sin\theta = \lim_{\theta \underset{>}{\to} 0} (1 + \frac{1}{\theta}) \sin\theta = \lim_{\theta \underset{>}{\to} 0} \sin\theta + \lim_{\theta \underset{>}{\to} 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

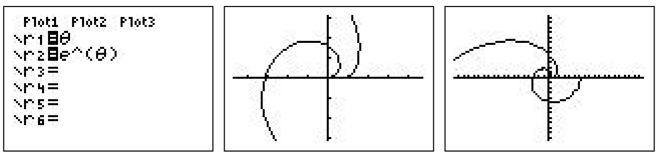
De "asymptotische cirkel" volgt uit het feit dat het punt (r, θ) in poolcoördinaten om de oorsprong blijft draaien indien $\theta \to +\infty$ en dat

$$\lim_{\theta \to +\infty} r = \lim_{\theta \to +\infty} 1 + \frac{1}{\theta} = 1$$

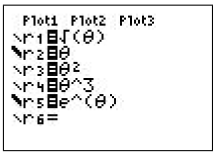
Zo zie je maar dat asymptotisch gedrag niet rechtlijnig hoeft te zijn. Een ander voorbeeld is de functie met voorschrift $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ dat een asymptotisch parabolisch gedrag heeft.

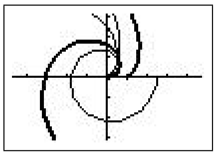
Opdracht 21. *Spiralen*
Afhangend van de begeleiding kan dit voorbeeld gaan van een eenvoudige oefening tot een onderzoekscompetentie-opdracht. Gebruik de **TI-84+** om in poolcoördinaten de grafiek te maken van de krommen gegeven door $r = \theta$ en $r = \exp\theta$. Bespreek gelijkenissen en verschillen. Wat als je ook krommen met vergelijking $r = \theta^n$ beschouwt? Zoek zelf nog een aantal andere "spiralen". Waarom zijn hier poolcoördinaten beter geschikt dan cartesische? Waaraan moet f voldoen om een spiraal te bekomen als grafiek? Welke soorten spiralen kan je onderscheiden? Wat over het asymptotisch gedrag?

Oplossing 21. Wat de eerste twee spiralen betreft is het duidelijk dat de eerste in de oorsprong begint,in tegenstelling tot de tweede. De tweede zal zich echter veel sneller verwijderen van de oorsprong dan de eerste. Omdat de parameter θ standaard in het interval $[0, 2\pi[$ genomen wordt eindigt de spiraal na een volledige draai. Via `window` kan men dit aanpassen.



De spiralen $r = \theta^n$ kan men gemakkelijk bekomen op de **TI-84+** en zo kan een leerling zelf vergelijken.





Extra voorbeelden van spiralen kan je altijd gaan zoeken op het internet[2] (of natuurlijk ook in een boek). Voor meer onderzoekscompetentie gerichte vragen kan een leerling gaan kijken naar bijvoorbeeld dingen zoals de zin of begrensdheid van een spiraal.

- Een **uitwaartse spiraal** is de grafiek in poolcoördinaten van een strikt stijgende functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. vb: $f(\theta) = \theta$
- Een **inwaartse spiraal** is de grafiek in poolcoördinaten van een strikt dalende functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. vb: $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}$
- Een spiraal kan **begrensd** of **onbegrensd** zijn. vb: $f(\theta) = \frac{1}{1+\theta}$ en $f(\theta) = \sqrt{\theta}$
- Spiralen kunnen rechte en/of cirkelvormige asymptoten vertonen, zie oa opdracht 20. vb: $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$, $f(\theta) = \frac{1}{\theta}$, $f(\theta) = \frac{1}{\theta} + 2$ of zelfs $f(\theta) = \text{atan}(\theta - 10\pi) + \pi$
- ...

Parametercoördinaten

Voor vele systemen wordt een beschrijving gegeven van een punt in het vlak in functie van de tijd $(x(t), y(t))$ Men kan dit ook schrijven als een stel parametervergelijkingen: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$. We zullen de **TI-84+** nu gebruiken om een oefening in deze context op te lossen.

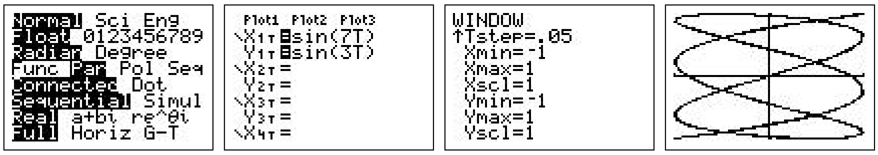
Opdracht 22. *Lissajous-krommen*
Een Lissajous-kromme wordt gegeven door de combinatie van twee loodrecht op elkaar staande oscillaties.

$$\begin{cases} x = \sin(at) \\ y = \sin(bt) \end{cases}$$

[2] Een goed startpunt is de site: `http://mathworld.wolfram.com/topics/Spirals.html`

Gebruik de **TI-84+** om deze krommen te onderzoeken. Ga na dat de vorm afhangt van de verhouding $\frac{b}{a}$. In het kader van de onderzoekscompetentie kan hier ook een ZW oscilloscoop aan gekoppeld worden.

Oplossing 22. Selecteer opnieuw eerst via `mode` de optie `[par]` en geef daarna via `y=` de parametervergelijkingen in. Maak uiteindelijk de tekening met `[zdecimal]` en pas het venster aan via `window`.

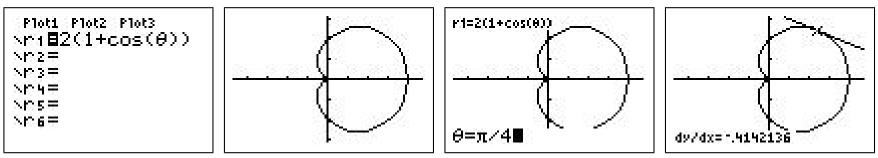


3.3 Te gemakkelijk met de TI-84+ !

In deze paragraaf zullen we een aantal opgaven behandelen die zeer snel met de **TI-84+** te doen zijn, maar waar er in werkelijkheid toch wel wat meer wiskunde aan te pas komt. De oplossingen van deze opgaven is een stuk technischer dan het vorige en zal door sommigen als *moeilijk* ervaren worden! De snelle lezer kan gerust dit deel overslaan en doorgaan met het volgend hoofdstuk.

Opdracht 23. *Raaklijnen in poolcoördinaten*
Als we nu een kromme gegeven krijgen in poolcoördinaten, bijvoorbeeld de cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$, kunnen we dan de raaklijn bepalen in het punt waarvoor $\theta = \frac{\pi}{4}$?

Oplossing 23. Met de **TI-84+** kan dit op zeer eenvoudige wijze. Maak eerst de grafiek in poolcoördinaten en gebruik daarna `2nd` `[draw]` `[tangent(]`. Tik vervolgens `2nd` `[π]` `/` `4` in om de raaklijn te tekenen in het gewenste punt. Als bonus verschijnt nu de waarde van $\frac{dy}{dx}$ in dit punt. Je had deze ook kunnen vinden onder `2nd` `[calc]`.



Om de vergelijking van de raaklijn te vinden en het resultaat van de **TI-84+** te controleren hebben we wat meer wiskunde nodig. Het antwoord steunt op de theorie van de differentialen. We merken eerst op dat uit de vergelijking volgt dat

$$\begin{cases} x = 2(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = 2(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

De raaklijn is een rechte en gaat door het raakpunt (x_0, y_0) en heeft dus een cartesische vergelijking vergelijking: $y = m(x - x_0) + y_0$. Het raakpunt is het punt waarvoor $\theta = \frac{\pi}{4}$, we bekomen dus

$$\begin{cases} x_0 = 2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \\ y_0 = 2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

De richtingscoëfficiënt is de limiet van het differentie quotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Men kan dus schrijven dat

$$m = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}$$

Berekening van de differentialen levert

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = (-2\sin\theta - 4\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta = -2(\sin\theta + \sin 2\theta)\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = (2\cos\theta + 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = 2(\cos\theta + \cos 2\theta)\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

Uiteindelijk is dan

$$m = -\frac{\cos\theta + \cos 2\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta}$$

in het punt waarvoor $\theta = \frac{\pi}{4}$ is dus

$$m = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = 1 - \sqrt{2}$$

De vergelijking van de raaklijn is dus

$$y = (1-\sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) + 1 + \sqrt{2}$$

Opdracht 24. *Raaklijnen in parametercoördinaten*
Gegeven is een ellips in parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt waarvoor $t = t_0$. Maak een passende illustratie met de **TI-84+** .

Oplossing 24. We berekenen de differentialen

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -a\sin(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = b\cos(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

Zodat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gegeven is door

$$m = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b}{a}\cot t$$

Voor $t = t_0$ wordt dit $m = -\frac{b}{a}\cot(t_0)$ en het raakpunt is dan

$$\begin{cases} x_0 = a\cos(t_0) \\ y_0 = b\sin(t_0) \end{cases}$$

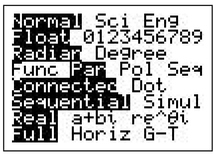
Indien bijvoorbeeld $a = 3, b = 2$ en $t_0 = \frac{\pi}{4}$ is dan is de raaklijn de rechte gegeven door

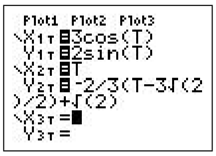
$$y = -\frac{2}{3}(x - 3\frac{\sqrt{2}}{2}) + \sqrt{2}$$

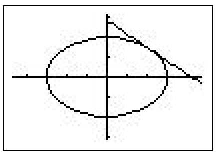
De raaklijn kun je onmiddellijk bekomen via `2nd` `[draw]` `[tangent(]` maar het is interessanter om aan te tonen dat elke cartesische vergelijking van de vorm $y = f(x)$ ook als parametervergelijking kan worden gegeven onder de vorm $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$. De parametervergelijking van de raaklijn wordt dan

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}(t - 3\frac{\sqrt{2}}{2}) + \sqrt{2} \end{cases}$$

Je kan zo beide krommen tekenen.





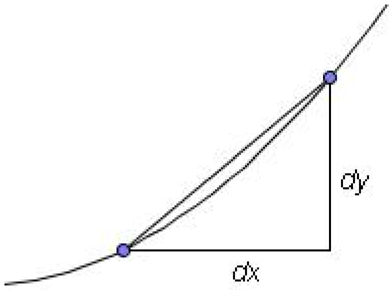


Opdracht 25. *Lengte van een kromme*
Gebruik de **TI-84+** om met behulp van differentialen de lengte te bepalen van de kromme gegeven door de parametervergelijkingen:

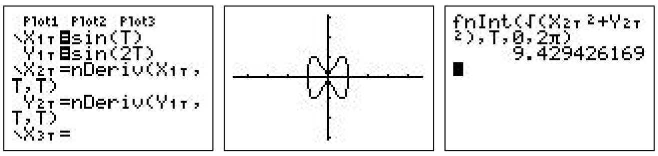
$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$$

Gebruik dit ook om de omtrek van een ellips te benaderen.

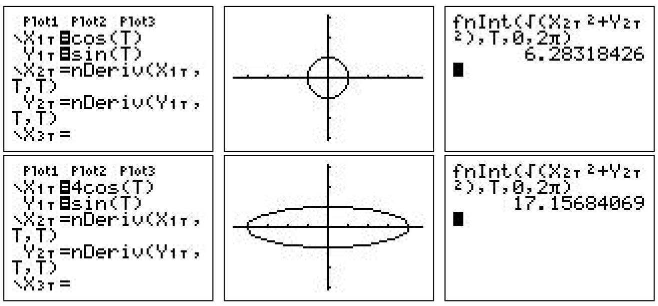
Oplossing 25. Men weet dat de lengte van een (infinitesimaal) klein stukje kromme kan benaderd worden door de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden dx en dy. Deze lengte is dan $\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$.



De totale lengte van een kromme, die zichzelf niet meerdere keren doorloopt, kan dan gevonden worden met behulp van de integraal van bovenstaande uitdrukking. Met de **TI-84+** kunnen we dit als volgt doen. We schakelen eerst over naar parameter vergelijkingen via `mode` `[par]`. Met `y=` voeren we nu de vergelijkingen in voor x en y. We gebruiken het commando `math` `[nderiv]` om de afgeleiden $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ te berekenen. We letten wel op dat we de differentialen niet tekenen. De booglengte kan nu berekend worden met bovenvermelde formule en de functie `math` `[fnint]`. Merk op dat de berekening relatief zwaar is omdat telkens beide differentialen moeten worden benaderd door de **TI-84+** .



Voor een cirkel of een ellips krijg je volgend resultaat.



Let op! Wat deze opdracht speciaal maakt is het feit dat, moesten we de omtrek van een ellips trachten te bepalen, men een *elliptische integraal* zou bekomen. Deze integralen zijn bekend omdat zij, net zoals $\int e^{-x^2} \mathrm{d}x$ niet uit te rekenen zijn. *Een formule voor de omtrek van een ellips is dus niet te vinden!* Met bovenstaande techniek kan men wel op een redelijk eenvoudige wijze een benadering vinden.

Hoofdstuk 4

Nog iets moeilijker ...

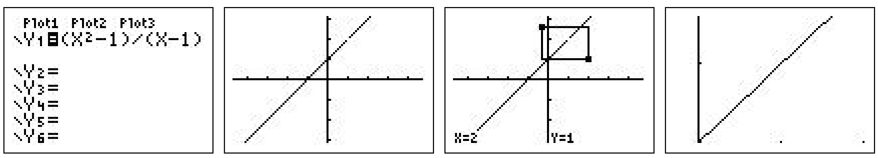
4.1 Hoe werkt de TI-84+ ?

We beginnen met enkele eenvoudige voorbeelden die illustreren hoe de **TI-84+** te werk gaat om bepaalde dingen gedaan te krijgen. Dit zal ons toestaan om "foute" antwoorden van de **TI-84+** te detecteren en te verklaren.

Hoe maakt de TI-84+ een grafiek?

Opdracht 26. *Limieten en continuïteit*
Maak de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Bespreek de continuïteit en de nodige limieten. Gebruik nu de **TI-84+** om de grafiek te maken (kies `zoom` `[zdecimal]`!). Wat merk je? Gebruik nu `zoom` `[zbox]` om in te zoomen rondom de discontinuïteit. Probeer dit enkele malen. Wat merk je nu? Verklaar de fout die de **TI-84+** maakt.

Oplossing 26. De eerste maal dat je de grafiek maakt met `zoom` `[zdecimal]` verschijnt de grafiek correct, met een discontinuïteit in 1. Na het inzoomen kan het echter wel zijn dat deze discontinuïteit verdwijnt – dit hoeft echter niet altijd te gebeuren.



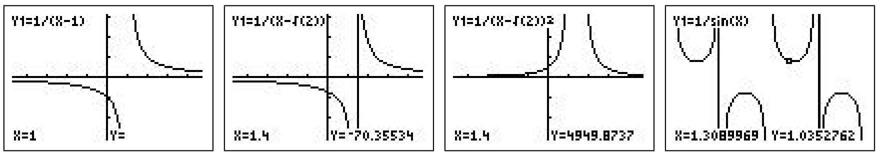
Verklaring 1. Dit komt omdat de **TI-84+** een grafiek maakt door 95 punten gelijkmatig uit het interval [`xmin`,`xmax`] te kiezen, dit komt overeen met het

aantal pixels dat het grafische scherm in de x-richting benut (1 extra pixel wordt gebruikt om te tonen dat een berekening bezig is). In deze punten wordt het beeld berekend en deze beelden worden verbonden met een lijnstuk. In ons voorbeeld zal met de standaardwaarden uit `[zdecimal]` ook het punt 1 gekozen worden, waarvoor er geen beeld bestaat en dus zal de **TI-84+** de lijn niet doortrekken. Als men echter inzoomt kan het zijn dat 1 niet wordt gekozen om de grafiek te tekenen maar bijvoorbeeld wel 0.98 en 1.02 In deze punten bestaat het beeld wel en dus trekt de **TI-84+** er een lijnstuk door. Gevolg: de discontinuïteit wordt onzichtbaar.

Opdracht 27. *Verticale asymptoten*
Opmerking: Deze opdracht hangt sterk af van de gebruikte machine (zie verklaring).

Maak achtereenvolgens de grafieken van de functies met voorschriften $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$ en $f_3(x) = \frac{1}{(x-\sqrt{2})^2}$, gebruik `[zdecimal]`. Bekijk de verticale asymptoten, worden ze getekend of niet? Tracht een verklaring te bedenken. Gebruik `2nd` `[trace]` om functiewaarden na te gaan. Ga je verklaring na door de functie $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ te tekenen. Gebruik `[ztrig]` en doe de assen weg met `2nd` `[format]` `[axesoff]`.

Oplossing 27. Afhangend van de gekozen functie lijkt het dat er soms een verticale asymptoot wordt getekend en soms niet.

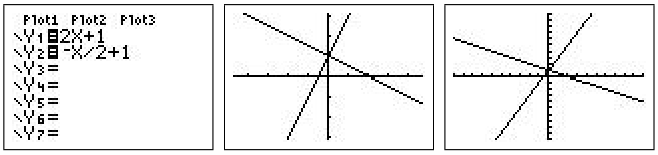


Verklaring 2. We hebben te maken met een analoog probleem als bij de vorige opdracht. Omdat `mode` `[connect]` aan staat zal de **TI-84+** tussen elke twee punten die het berekent om een grafiek te maken een lijnstuk trekken. Wanneer een functie in een punt een verticale asymptoot heeft en van teken verandert zal de **TI-84+** de twee punten die het aan weerskanten heeft berekend, verbinden met een lijnstuk. Het lijkt dus alsof de asymptoot getekend wordt. Eén uitzondering is wanneer het punt waardoor de asymptoot gaat gekozen werd om de grafiek te maken, dit punt heeft immers geen beeld dus kan er ook geen lijnstuk door getrokken worden. Bovendien zijn de modernere machines (sommige **TI-84+**) uitgerust met een extra algoritme dat tussen twee opeenvolgende uitgerekende beelden nagaat of het lijnstuk niet *te* stijl is, indien wel, dan wordt de lijn niet doorgetrokken. Het kan dus zijn dat bij de bovenstaande opdracht u nooit enige ‘asymptoot’ ziet. Zet

dan maar de parameter `[window]` `[xres]` op 2 (of 3) en probeer opnieuw – er worden dan maar voor één op twee van de 95 gekozen punten de beelden berekend, zodat de verbindingslijnstukken minder stijl worden en het extra algoritme niet meer werkt.

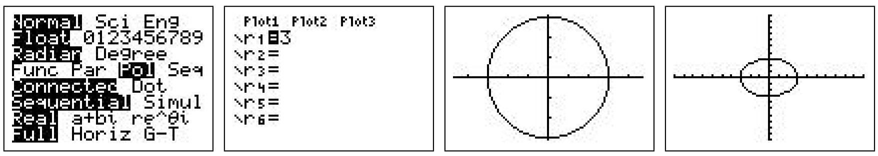
Opdracht 28. *Orthonormale assenstelsels*
Maak de grafiek van twee loodrecht op elkaar staande rechten. Maak ook de grafiek van een cirkel (gebruik poolcoördinaten). Doe dit eerst met `[zdecimal]` en daarna met `[zstandard]`. Wat merk je? Wat met de andere `zoom`-opties?

Oplossing 28. We kiezen de rechten $y = x + 1$ en $y = -x + 1$. We bekomen volgende de grafieken.



In het eerste geval staan beide rechten loodrecht op elkaar maar in het tweede absoluut niet!

Voor de cirkel nemen we de poolvergelijking $r = 3$. We krijgen volgende grafieken.



We zien duidelijk dat er een vervorming optreedt, we bekomen immers een ellips en geen cirkel!

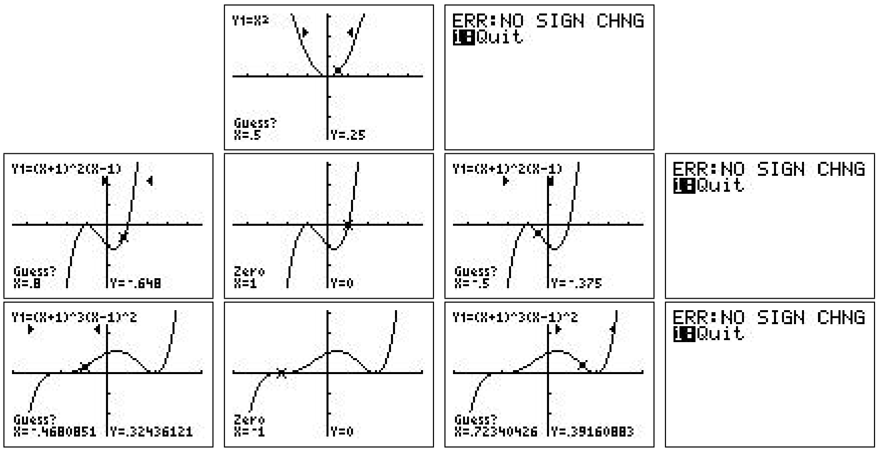
Verklaring 3. Het essentiële verschil tussen `[zdecimal]` en de anderen is dat in `[zdecimal]` het grafisch venster zo wordt ingesteld dat men beschikt over een ortho*normaal* assenstelsel. In de andere gevallen gaat het slechts om een ortho*gonaal* assenstelsel, waarbij de schaalverdeling op beide assen niet noodzakelijk gelijk is. Uit de vlakke meetkunde weten we dat dat alle begrippen die steunen op het inprodukt (oa hoeken, loodrechte stand en afstand), een ortho*normaal* assenstelsel nodig hebben.

Nulwaarden bepalen.

Opdracht 29. *Nulwaarden benaderen / Continuïteit*

Soms slaat de **TI-84+** reeds tilt bij de meest eenvoudige oefening! Probeer maar eens de nulwaarde te zoeken van $f(x) = x^2$. Gebruik de **TI-84+** om de nulwaarden te zoeken van $(x+1)^2(x-1)$ en van $(x+1)^3(x-1)^2$. Welke nulwaarden kan de **TI-84+** wel vinden? Wat is het verband met de foutmelding?

Oplossing 29. Bij het zoeken naar een nulwaarde waarbij het teken niet verandert (dwz een nulwaarde van even multipliciteit voor een veeltembreuk) geeft de **TI-84+** de foutmelding `[no sign change]`.



Verklaring 4. Welk algoritme de **TI-84+** juist gebruikt om een nulwaarde te bepalen is moeilijk te achterhalen gezien *Texas Instruments* deze informatie niet in de handleiding of op hun website zet. Maar het gebruikte algoritme leunt sterk aan bij de dichotomie methode of de regula falsi methode. Deze methoden kunnen gemakkelijk besproken worden met de leerlingen. Volgende stelling wordt behandeld.

Stelling 3. *(Bolzano)*
Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, continu op het interval $]a, b[$ en rechtscontinu in a, linkscontinu in b. Indien $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) < f(a)$) dan bestaat er voor elke $c \in [f(a), f(b)]$ (resp. $c \in [f(b), f(a)]$) een $x \in [a, b]$ zodat $c = f(x)$.

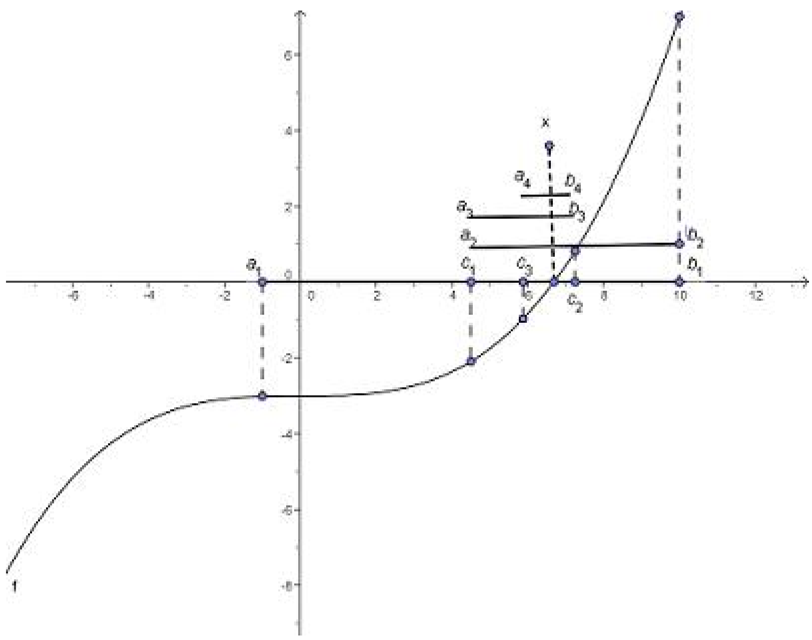
Een uiterst nuttige stelling die onmiddellijk uit de vorige volgt is de volgende.

Stelling 4. *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, continu op het interval $]a, b[$ en rechtscontinu in a, linkscontinu in b. Indien $f(a)$ en $f(b)$ een verschillend teken hebben, dan bezit f een nulwaarde in $[a, b]$.*

Het nut van deze stelling ligt vooral in haar vele toepassingen. Leerlingen kunnen hiermee gemakkelijk tonen dat elke derdegraadsveelterm (of veelterm van oneven graad) altijd minstens één nulwaarde heeft, gewoon door twee waarden uit te rekenen.

Een andere toepassing is het numeriek benaderen van nulwaarden door deze stelling iteratief toe te passen. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, continu op het interval $]a_1, b_1[$ en rechtscontinu in a_1, linkscontinu in b_1. Stel dat $f(a_1)$ en $f(b_1)$ een verschillend teken hebben. De functie heeft een nulwaarde x in $[a_1, b_1]$. Bepaal nu het midden $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Als $f(c_1) = 0$ hebben we de nulwaarde gevonden. Indien $f(c_1)$ en $f(a_1)$ een verschillend teken hebben dan stellen we $a_2 = a_1$ en $b_2 = c_1$ en anders, als $f(c_1)$ en $f(b_1)$ een verschillend teken hebben, kiezen we $a_2 = c_1$ en $b_2 = b_1$ (zie figuur). De functie heeft nu een nulwaarde $x \in [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. We berekenen opnieuw het midden $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ en herhalen de procedure. Aldus bekomen we een rij intervallen die steeds de nulwaarde x beter benaderen:

$$x \in \ldots \subset [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$$

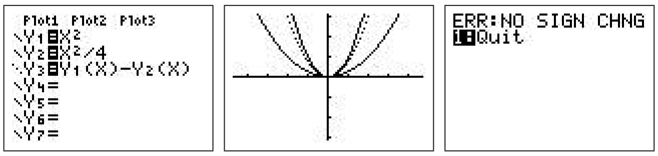


Deze methode om nulwaarden te benaderen (soms ook dichotomie of bisectiemethode genoemd) werkt enkel onder voorwaarde dat f van teken verandert in de nulwaarde. De foutmelding `[no sign change]` duidt aan dat deze methode (of een analoge methode zoals de regula falsi) wordt gebruikt, en wegens gebrek aan een tekenverandering in de nulwaarde, geen benadering kan geven. De bisectiemethode kan bovendien op eenvoudige manier geprogrammeerd worden door de leerlingen (zie opdracht 34).

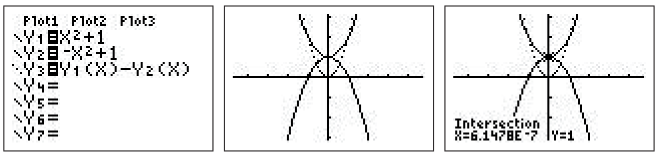
Opdracht 30. *Extrema en snijpunten*
Je weet nu hoe de **TI-84+** nulwaarden benadert (zie verklaring 4). Denk na op welke manier er nu ook minima, maxima en snijpunten van krommen (zie `2nd` `[calc]`) kunnen bepaald worden. Laat zien dat minima en maxima altijd gevonden zullen worden. Geef een voorbeeld van twee krommen waarvan de **TI-84+** geen snijpunt kan bepalen. Bespreek het voorbeeld $f(x) = x^2+1$ en $g(x) = -x^2 + 1$, kan de **TI-84+** hiervan het snijpunt vinden?

Oplossing 30. We weten dat een functie f een extremum heeft in x wanneer $f'(x) = 0$ en f' van teken verandert, dit wordt dus herleid tot het vinden van een nulwaarde waarin het teken verandert. De voorwaarden voor de bisectiemethode zijn dus voldaan: een extremum zal gevonden worden.

Wat het bepalen van een snijpunt betreft: de vergelijking $f(x) = g(x)$ herleidt zich tot $f(x) - g(x) = 0$. Dus kan er misschien weer een nulwaarde gevonden worden. Dit lukt echter niet altijd. Neem bijvoorbeeld $f \geq g$, dwz dat $f - g \geq 0$ en dat er dus geen tekenverandering is.

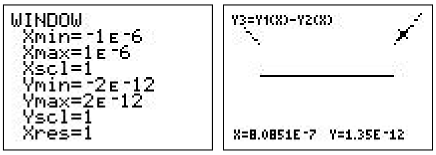


Je verwacht dus dat in het voorbeeld $f(x) = x^2 + 1$ en $g(x) = -x^2 + 1$ er geen snijpunt zal gevonden worden. Nochtans:



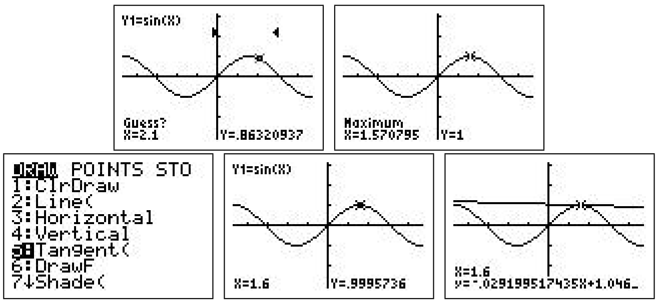
Verklaring 5. We weten dat een functie f een extremum heeft in x wanneer $f'(x) = 0$ en f van teken verandert. De **TI-84+** kan wel een nulwaarde vinden maar geen afgeleide functie bepalen! Wanneer je echter het algoritme beschreven in verklaring 4 bekijkt moeten er slechts in enkele punten het afgeleid getal bepaald worden, dit kan de **TI-84+** benaderen door een passend differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ met behulp van `[nderiv]`.

We merken eerst op dat het gebruikte algoritme om snijpunten te bepalen (lichtjes) anders moet zijn dan die om nulwaarden, maxima of minima te bepalen. Dit merken we aan het feit dat we deze keer geen grenzen moeten meegeven. Ten tweede wordt in ons voorbeeld wel het snijpunt $(6.147{\cdot}10^{-7}, 1)$ gegeven, maar dit is niet het exacte snijpunt $(0, 1)$. Er is duidelijk een afronding gebeurd. Als we de grafiek maken van $f - g$ op een veel kleiner interval, zien we duidelijk het effect van de afrondingen.

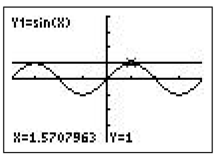


Opdracht 31. *Minima en maxima*
Bepaal een maximum van de functie $f(x) = \sin x$. Maak de grafiek van f en van de raaklijn in dit maximum. Doe dit eerst met `[zdecimal]`, daarna met `[ztrig]`. Wat merk je?

Oplossing 31. Maak de grafiek van f via `y=` en met `zoom` `[zdecimal]`. Gebruik `2nd` `[calc]` `[maximum]` om een maximum te bepalen. Gebruik daarna `2nd` `[draw]` `[tangent(]` om de raaklijn te tekenen in dit punt.



Je merkt dat de raaklijn absoluut niet horizontaal loopt zoals het hoort. Wanneer je dezelfde oefening doet maar dan met `[ztrig]` dan bekom je wel een juiste grafiek.



Verklaring 6. Dit komt doordat de **TI-84+** intern een tabel maakt met functiewaarden om de grafiek te tekenen. Bij `[zdecimal]` bevat deze tabel de getallen $0, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots$. Wanneer het maximum wordt bepaald via `2nd` `[calc]` wordt een benaderingsalgoritme gebruikt. De cursor komt dan te staan op $x = 1.570\ldots$. Wanneer nu een raaklijn moet worden getekend

zal de **TI-84+** de dichtsbij zijnde waarde uit de tabel zoeken, dwz. $x = 1.6$. In dit punt is echter de raaklijn niet horizontaal meer. Als je nu `[ztrig]` gebruikt bevat de interne tabel andere getallen. Het maximum ($x = \frac{\pi}{2}$) is nu exact (voor zover mogelijk) een waarde uit de tabel, er zal dus niet meer worden afgerond en dus zal de grafiek exact(er) zijn.

4.2 In TIBasic programmeren is eenvoudig.

In deze paragraaf zullen we enkele bekende algoritmen implementeren voor de **TI-84+** . Dit vereist slechts een klein beetje programmeerwerk. Bovendien zijn een aantal van deze programma's reeds voorgeprogrammeerd in de gebruiksfuncties van de **TI-84+** . Als leerlingen dus zelf eens deze programma's behandelen tijdens de lessen, krijgen ze inzicht in hoe een grafische rekenmachine de dingen, die gevraagd worden, berekent. Bovendien is tegenwoordig de belangrijkste toepassing van de wiskunde de informatica, in ruime zin. Van grafisch rekenmachine tot statistiche computerprogramma's, via gsm's, mp3-spelers, gameboy's en playstations, computer games en internettoepassingen, in bijna elke moderne technologie zit meer dan 50% wiskunde. Zonder wiskunde geen moderne technologie!

De programmeertaal die in de **TI-84+** zit is TIBasic. Dit is een dialect van BASIC, een programmeertaal waarmee Bill Gates (Microsoft) zijn faam heeft verworven. BASIC (Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code) werd ontworpen om ook de leek in staat te stellen om kleine programma's te schrijven. Het TIBasic-dialect is trouw aan deze filosofie: er is geen enkele programmeer-ervaring nodig om programma's te schrijven voor de **TI-84+** . Enkel een beetje doorzettingsvermogen en zelfvertrouwen is nodig.

Om een programma te schrijven ga je naar `prgm`. Je kunt hier kiezen om een programma uit te voeren (`[exec]`), te veranderen (`[edit]`) of om een nieuw programma te schrijven (`[new]`). Indien je de laatste keuze maakt wordt er naar een naam gevraagd. Nadien kom je op de editor uit, waar je je programma kan invoeren. De commando's die met het programmeren te maken hebben zitten nu onder `prgm`. We geven hier een kort overzicht van de nuttigste programmeerfuncties.

`[ctl]`	
`[if]`	Eerste vorm:
	`:if` *voorwaarde* : *commando*
`[then]`	Tweede vorm: uitgebreide `if` structuur:
`[else]`	`:if` *voorwaarde*
	`:then`
	: *commando's*
	`:else`
	: *commando's*
	`:end`
`[for]`	om lussen te maken
	`:for(` *var, beginwaarde, eindwaarde [, stapgrootte]* `)`
	: *commando's*
	`:end`
`[end]`	om bovenstaande blokken te eindigen

`[i/o]`	
`[disp]`	om een waarde/string op het scherm te printen
`[prompt]`	om de waarde van een variabele te vragen aan de gebruiker
`[input]`	om een text op het scherm te tonen en een waarde te vragen aan de gebruiker, deze kan ook een functie zijn.
	`:input` *"text", variabele* (bijv. *"Functie :"*, y_1)

Nu we de nodige commando's kennen kunnen we een zeer eenvoudig voorbeeld behandelen, dat inzicht geeft over hoe de **TI-84+** grafieken maakt (zie oa verklaring 1).

Opdracht 32. *Grafiek van een functie*
Gebruik een `for`-lus om een programma te schrijven dat de grafiek van een functie (bijvoorbeeld de sinusfunctie) maakt dmv het volgend algoritme.

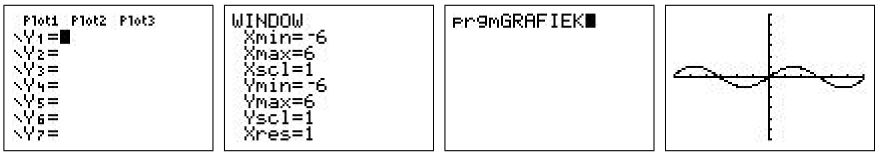
```
voor x gaande van -6 tot 6 met een stap van 0.1
bereken y=sin(x)
teken het punt (x,y)
sluit de lus
```

Gebruik de grafische commando's $\boxed{\texttt{2nd}}$ `[draw]` `[clrdraw]` (om een leeg scherm te krijgen) en $\boxed{\texttt{2nd}}$ `[draw]` `[point]` `[pt-on]` om een punt te tekenen. Vergeet niet van via $\boxed{\texttt{y=}}$ alle functies weg te halen en om met $\boxed{\texttt{window}}$ de grenzen aan te passen!

Oplossing 32. Het programma telt exact vijf regels:

```
PROGRAM:GRAFIEK
:ClrDraw
:For(X,⁻6,6,.1)
:sin(X)→Y
:Pt-On(X,Y)
:End
:
```

Het resultaat is hetzelfde als hetgeen we zouden verkrijgen door de ingebouwde functies te gebruiken.



Voorbeeldprogramma's

Opdracht 33. *Vierkantsvergelijkingen*
Schrijf een programmaatje dat een vierkantsvergelijking oplost.

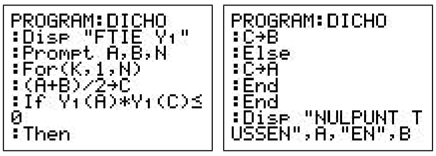
Oplossing 33. We geven hier een variant waarbij we ervan uit gaan de tweedegraadscoëfficiënt verschilt van nul en waarbij we geen onderscheid maken tussen de verschillende gevallen voor de discriminant D. We geven ook het resultaat weer als een lijst van twee oplossingen. Indien $D > 0$ krijg je een lijst terug met twee verschillende oplossingen. Als $D = 0$ dan bevat de lijst tweemaal hetzelfde getal. Indien $D < 0$ zal de **TI-84+** een foutmelding geven (`[nonreal answer]`), omdat er geen oplossingen gevonden kunnen worden tenzij je via `mode` de **TI-84+** hebt ingesteld om in $\mathbb{C}$ te werken (`[`$a + bi$`]`), in dat geval krijg je de twee complexe oplossingen.

```
PROGRAM:VKV
:Disp "AX²+BX+C=
0"
:
:Prompt A,B,C
:B²-4*A*C→D
:Disp "D=",D
:
```

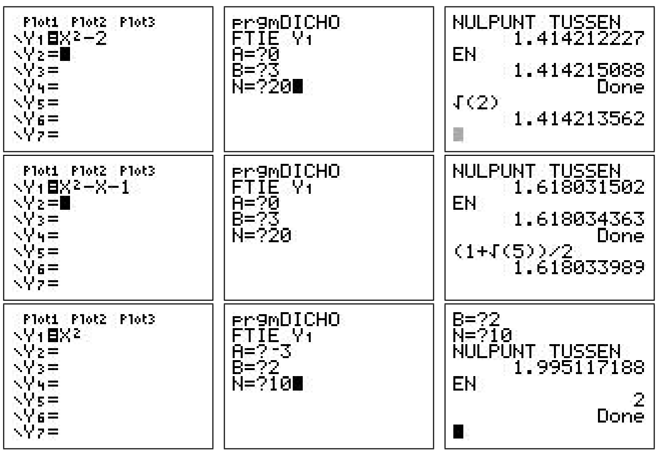
```
PROGRAM:VKV
:
:{(⁻B+√(D))/(2*A
),(⁻B-√(D))/(2*A
)}
:
:
:
```

Opdracht 34. *Nulwaarden benaderen / Dichotomie*
Lees verklaring 4 en schrijf het corresponderende programma.

Oplossing 34. Voor een bespreking van het algoritme verwijzen we naar verklaring 4. Het programma dat we geven gaat ervan uit dat de functie in y_1 zit. Er wordt gevraagd naar het interval $[a, b]$ waarin een nulwaarde zit en waarbij $y_1(a)$ en $y_1(b)$ een verschillend teken hebben. Bovendien wordt ook het aantal iteraties n gevraagd. In het programma moeten we ondermeer nagaan of $y_1(a)$ en $y_1(c)$ een verschillend teken hebben, dit kan het gemakkelijkst door de voorwaarde $y_1(a) \cdot y_1(c) \leq 0$ na te gaan. Afhangend hiervan passen we de grenzen van het interval waarin de nulwaarde zit aan.

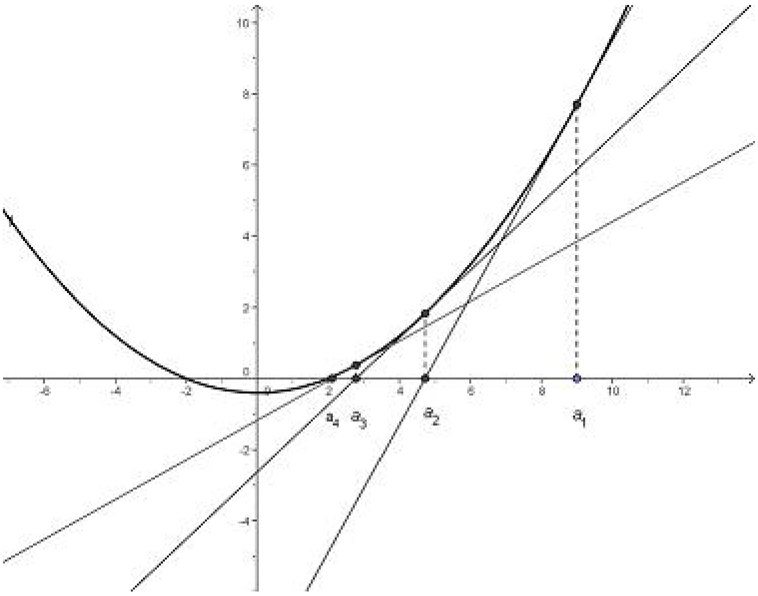


Indien de voorwaarden voldaan zijn (en we gaan er vanuit dat dit zo is, om het programma zo eenvoudig mogelijk te houden) zal het programma een betere benadering geven (kleiner interval) dan het interval waarvan men vertrekt. Indien de voorwaarden niet voldaan zijn, zal een foute benadering gegeven worden. Door enkele extra regels toe te voegen kan men het foutief antwoord vervangen door een passende foutmelding, zoals de **TI-84+** dat doet. We werken een aantal voorbeelden uit, waarbij we $\sqrt{2}$ en de gulden snede benaderen. Het laatste voorbeeld toont wat er gebeurt indien de voorwaarden niet voldaan zijn, merk op dat de nulwaarde vinden met het ingebouwde commando `2nd` `[calc]` `[zero]` ook geen resultaat oplevert. Dit komt doordat de **TI-84+** een analoog algoritme gebruikt.



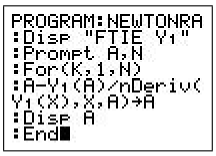
Opdracht 35. *Nulwaarden benaderen / Newton-Raphson*
Een andere manier om nulwaarden te benaderen maakt gebruik van de raaklijn. Als a_1 een benadering is van een nulwaarde van $y = f(x)$, dan kunnen we de raaklijn in a_1 bepalen: $y = f'(a_1)(x-a_1)+f(a_1)$. Het snijpunt van deze rechte met de x-as is dan de oplossing van $f'(a_1)x - f'(a_1)a_1 + f(a_1) = 0$. We noemen dit punt a_2, dus $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$. Door iteratie van

dit proces bekomen we een rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die de nulwaarde van f in vele gevallen steeds beter zal benaderen.



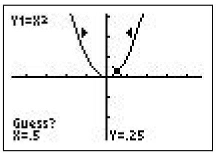
Schrijf een programma dat dit doet. Zoek als voorbeelden de nulwaarden van $f(x) = x^2 - 3$ en van $g(x) = x^2$. Gebruik ook de ingebouwde functies van de **TI-84+** . Wat merk je?

Oplossing 35. Het programma is zeer eenvoudig en telt slechts zes regels.



De nulwaarden van de functies $f(x) = x^2 - 3$ en $g(x) = x^2$ kunnen hiermee benaderd worden.

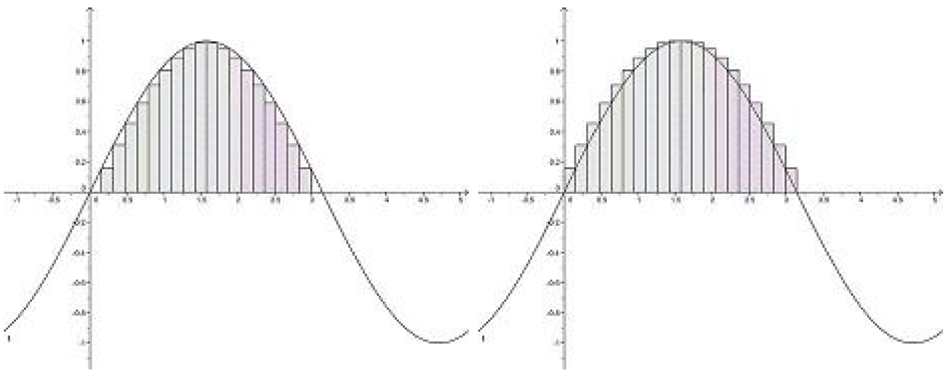
De nulwaarde van $g(x) = x^2$ wordt benaderd, dit is een beter resultaat dan wat de **TI-84+** met de ingebouwde functies kan doen (zie ook opdracht 29).




```
ERR:NO SIGN CHNG
1:Quit
```

Opdracht 36. *Numerieke integratie / Boven- en ondersom*

Een bepaalde integraal kan men benaderen door een ondersom of door een bovensom. De echte waarde ligt ertussen (zie figuur).



Schrijf een kort programma om elk van de benaderingen uit te rekenen. En behandel als voorbeeld $\int_0^\pi \sin x \; \mathrm{d}x$.

Oplossing 36. We zullen er van uitgaan dat de functie in de variable y_1 zit. De grenzen van de bepaalde integraal zijn a en b. We verdelen het interval in n gelijke delen. Gezien we functiewaarden enkel berekend worden in de steunpunten $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, gebruiken we het minimum van opeenvolgende beelden voor de ondersom en het maximum voor de bovensom. Indien de onderverdeling fijn genoeg is zal de werkelijke waarde van de bepaalde integraal tussen beide benaderingen zitten.

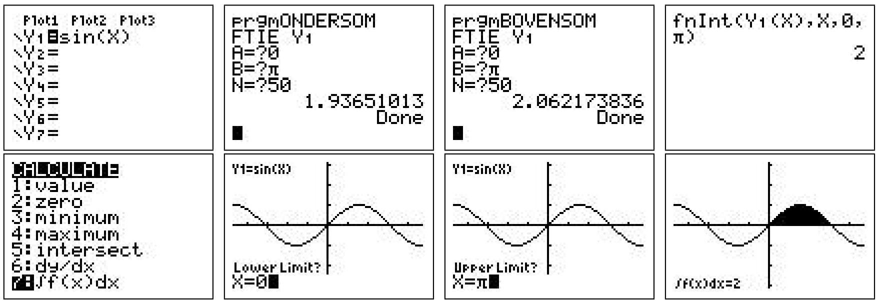
```
PROGRAM:ONDERSOM
:Disp "FTIE Y1"
:Prompt A,B,N
:(B-A)/N→H
:0→S
:
:For(K,0,N-1)
:A+K*H→X
```

```
PROGRAM:ONDERSOM
:S+min(Y1(X),Y1(
X+H))*H→S
:End
:Disp S
:
:
:
```

```
PROGRAM:BOVENSOM
:Disp "FTIE Y1"
:Prompt A,B,N
:(B-A)/N→H
:0→S
:
:For(K,0,N-1)
:A+K*H→X
```

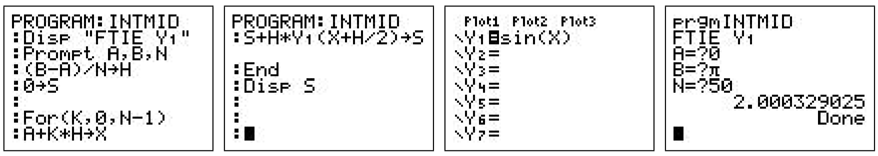
```
PROGRAM:BOVENSOM
:S+max(Y1(X),Y1(
X+H))*H→S
:End
:Disp S
:
:
:
```

Toepassing van beide programma's en vergelijking met de resultaten van de ingebouwde functies levert relatief goede resulaten.



Opdracht 37. *Numerieke integratie / Midpuntsregel*
Om de bepaalde integraal $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ te benaderen kun je het interval $[a, b]$ verdelen in n gelijke delen, elk met een lengte h, dit geeft de punten $x_k = a + kh$, $k = 0, 1 \dots n-1$. Meetkundig kun je de oppervlakte onder $y = f(x)$ onderverdelen in rechthoeken door x_k en x_{k+1} en met hoogte $f(x_k + \frac{h}{2})$. Je bekomt dan als benadering $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k + \frac{h}{2})$. Maak een tekening, en schrijf het programma `intmid` dat deze benadering gebruikt. Benader $\int_0^\pi \sin x\ \mathrm{d}x$. Vergelijk en toon dat je in dit geval betere resultaten bekomt dan met een onder- of bovensom benadering.

Oplossing 37. Het programma `intmid` is opnieuw relatief kort en snel geschreven. We zullen dezelfde variabelen gebruiken als in de vorige opdracht.



Opdracht 38. *Poolcoördinaten / Oppervlakte*
Gegeven is een kromme in poolcoördinaten $r = f(\theta)$. De oppervlakte begrensd door deze kromme wordt gegeven door

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta$$

Waarom? Schrijf een programma dat deze oppervlakte tekent en berekent.

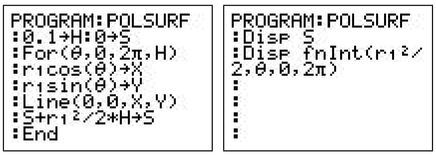
Oplossing 38. We weten dat een cirkel een oppervlakte heeft gelijk aan $\pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \boxed{2\pi}$. Een halve cirkel heeft oppervlakte $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{2} r^2 \boxed{\pi}$. Een sector met hoek θ heeft oppervlakte $\frac{1}{2}r^2\boxed{\theta}$. We kunnen inzien dat een infinitesimale sector met hoek dθ een oppervlakte heeft, gelijk aan

$$\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$$

De oppervlakte ingesloten door de kromme $r = f(\theta)$ is

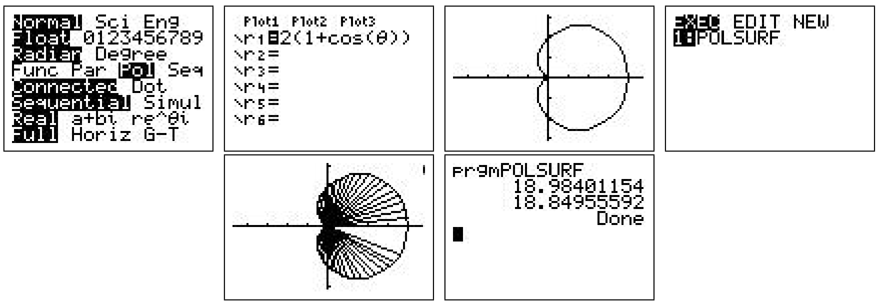
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$$

Het programma bevat slechts 9 lijntjes:



H bevat de integratiestap, S zal uiteindelijk de oppervlakte worden. Daarna wordt een lus gestart en we veronderstellen dat de functie in r_1 staat. Telkens wordt een punt bepaald en wordt een lijnstuk vanuit O getrokken. Het stukje oppervlak $\frac{1}{2}r_1^2H$ wordt dan bij S geteld. Uiteindelijk wordt zowel S als $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$ teruggegeven.

Om het resultaat te zien geef je het voorschrift in als r_1 en maak je de grafiek van de kromme. Roep daarna het programma aan.



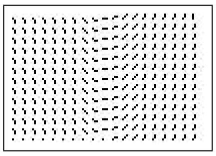
Let op! Dit gaat enkel voor krommen (zonder lussen) die een bepaald gebied G begrenzen waar voor elk punt $P \in G$ ook het lijnstuk OP volledig binnen G valt, anders moet de integraal op gepaste wijze worden opgesplitst.

4.3 Met een beetje programmeren ...

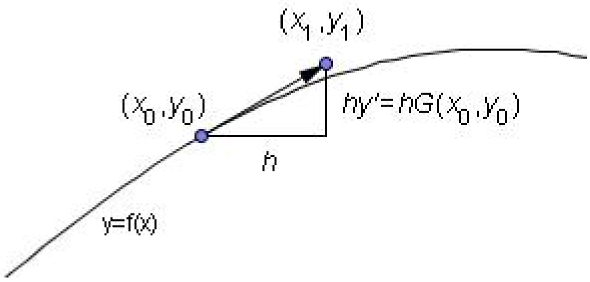
In wat volgt zullen we de **TI-84+** gebruiken om leerlingen inzicht te laten krijgen in de problemen van de analyse en tonen tot wat men in staat is met een grafisch, programeerbaar rekentoestel. Het gekozen stuk, nml het numeriek/grafisch oplossen van eenvoudige differentiaalvergelijkingen, is zeker doenbaar maar zal opnieuw door sommigen als *moeilijk* aanzien worden. De lezer kan dit deel gerust overslaan en doorgaan met het volgend hoofdstuk.

Vanaf het ogenblik dat men beschikt over het begrip afgeleiden kan men volgend probleem schetsen. Stel dat men van een bepaalde functie $y = f(x)$ informatie heeft over de afgeleide bijvoorbeeld $y' = G(x, y)$, kan men dan de grafiek van f terugvinden? De hierbij vermelde vergelijking is een eenvoudig voorbeeld van een differentiaalvergelijking. Sommige differentiaalvergelijkingen kan men oplossen door te integreren, maar lang niet allemaal. Toch kan men op eenvoudige manier de grafiek van f terugvinden, zelfs op een **TI-84+** . Dit steunt op de numerieke integratiemethode van Euler.

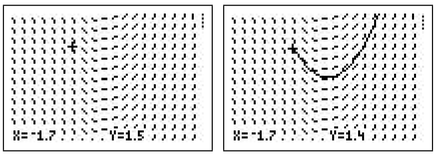
Wat eigenlijk gegeven is is de afgeleide (dus een raakvector) in elk punt van het vlak want $y' = f'(x) = G(x, y)$. We kunnen dus in elk punt van het vlak een kleine raakvector tekenen. Men bekomt aldus een "fieldplot". Indien we het voorbeeld $y' = x$ gebruiken, ziet de fieldplot er als volgt uit.



Hoe kunnen we nu hieruit de grafiek van f halen? Stel dat we van een zeker punt (x_0, y_0) veronderstellen dat het op de kromme $y = f(x)$ ligt. In dit punt kennen we een raakvector $(1, y') = (1, G(x_0, y_0))$. Als we nu een klein stapje $(h > 0)$ zetten in de x-richting en in de y-richting een stapje $hG(x_0, y_0)$, dan volgen we de raakvector en komen we in een punt $(x_1, y_1) = (x_0+h, y_0+hG(x_0, y_0))$ terecht dat zeer dicht bij de kromme ligt. In dit nieuwe punt kunnen we opnieuw beginnen en aldus volgen we stapje na stapje de kromme.



Wanneer we al deze punten tekenen zien we een goede benadering voor de werkelijke kromme $y = f(x)$. Merk op dat we wel een keuze hebben. Het eerste punt kan je vrij kiezen, de kromme die dan berekend wordt zal altijd een oplossing zijn, we noemen dit eerste punt de beginvoorwaarde. In ons voorbeeld blijkt de oplossing de vorm van een parabool te zijn. In dit geval hadden we de algemene oplossing $y = \frac{x^2}{2} + c$ ook kunnen vinden via integratie.



We keren nu naar de vraag hoe we dit alles in de **TI-84+** krijgen. Hiervoor moeten we een beetje programmeren.

Opdracht 39. *Fieldplot*
Schrijf een programma dat een fieldplot tekent van de differentiaalvergelijking $y' = G(x, y)$.

Oplossing 39. Het programma ziet er als volgt uit.

```
PROGRAM:FPLOT
:FnOff
:AxesOff
:ZDecimal
:0.5→H
:0.25→E
:For(X,Xmin,Xmax
,H)
```

```
PROGRAM:FPLOT
:For(Y,Ymin,Ymax
,H)
:Y₁→G
:Line(X,Y,X+E/√(
1+G²),Y+E*G/√(1+
G²))
:End:End
```

- De eerste regel zorgt ervoor dat geen enkele functie uit $\boxed{\texttt{y=}}$ getekend wordt, dit is nodig want we zullen y_1 gebruiken om de functie $G(x, y)$ in op te slaan.

- De tweede en de derde regel zorgen voor een standaard venster zonder assenkruis (anders is het beeld niet meer overzichtelijk).

- We zullen nu het vlak onderverdelen in een raster van punten die in de x- en de y-richting op een afstand H van elkaar liggen. In elk van deze punten zullen we een (genormaliseerde) raakvector van lengte E tekenen.

- Na de definitie van H en E zorgen twee `for`-lussen ervoor dat elk punt in het raster wordt doorlopen. In elk van deze punten wordt via y_1 de functie $G(x, y)$ berekend. De waarde wordt opgeslagen in G.

- Vervolgens tekent men de genormaliseerde raakvector $(\frac{1}{\sqrt{1+G(x,y)^2}}, \frac{G(x,y)}{\sqrt{1+G(x,y)^2}})$ als een lijntje vanuit (x, y) met lengte E.

- Tenslotte worden beide `for`-lussen beëindigd.

Opdracht 40. *Methode van Euler*
Schrijf een programma dat de Eulermethode gebruikt om een oplossing te tekenen van de differentiaalvergelijking $y' = G(x, y)$.

Oplossing 40. Het programma ziet er als volgt uit.

```
PROGRAM:EULERINT
:FnOff
:Input
:0.1→H
:100→N
:For(K,1,N)
:Y1→G
:X→A:Y→B
```

```
PROGRAM:EULERINT
:X+H→X
:Y+G*H→Y
:Line(A,B,X,Y)
:End
:
:
:■
```

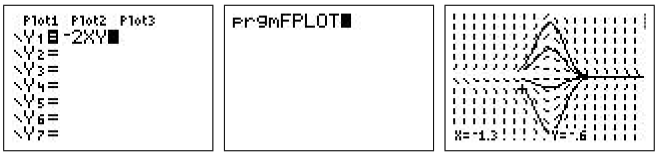
- Eerst wordt er opnieuw voor gezorgd dat de functies uit `y=` niet worden getekend, we zullen immers opnieuw y_1 gebruiken om de functie $G(x, y)$ in op te slaan. Het scherm wordt deze keer niet leeggemaakt dmv `[zdecimal]` omdat we eventuele output van `FPLOT` willen blijven zien.
- Daarna gebruiken we `prgm` `[i/o]` `[input]` zonder bijkomend argument. De gebruiker krijgt dan het grafisch venster te zien en kan met de pijltjestoetsen de cursor bewegen en de gewenste x en y coördinaten kiezen.
- Vanuit het gekozen startpunt, gaan we telkens met een stap H verder, en het programma zal uiteindelijk N punten uitrekenen.
- Hierna wordt de `for`-lus gestart en wordt via y_1 de functie $G(x, y)$ berekend en in de variabele G gestoken.
- Alvorens het volgende punt te berekenen worden de coördinaten onthouden in A en B, zodat we later vanuit dit punt naar het nieuwe een lijnstukje kunnen tekenen. Dan worden de nieuwe x en y waarden uitgerekend, het volgende punt wordt dus bepaald.
- Uiteindelijk wordt het lijnstukje getekend en sluit de lus zich.

We hebben dit programma zo geschreven dat we het kunnen laten aansluiten op het programma `FPLOT`. Doe dit door aan `FPLOT` volgende regels toe te voegen.

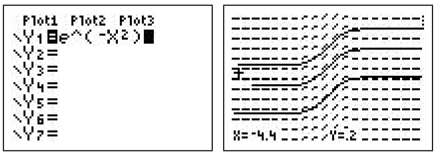
```
PROGRAM:FPLOT
:Lbl 1
:prgmEULERINT
:Goto 1
:■
:
:
:
```

Opdracht 41. *Differentiaalvergelijkingen*
Gebruik de bovenstaande programma's om de differentiaalvergelijking $y' = -2xy$ op te lossen, bepaal ook de algemene oplossing. Doe hetzelfde voor $y' = e^{-x^2}$. Wat is hierbij het probleem? Is dit een probleem voor onze programma's op de **TI-84+** ?

Oplossing 41. Met de **TI-84+** geeft de eerste vergelijking volgend resultaat.



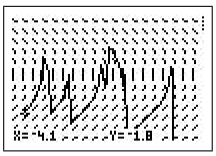
Door de veranderlijken af te zonderen en dan te integreren bekomt men de algemene oplossing $y = ce^{-x^2}$. De tweede vergelijking wordt met de **TI-84+** als volgt opgelost.



Deze differentiaalvergelijking kan men, hoe eenvoudig ze ook is, onmogelijk oplossen. De oplossing wordt immers gegeven door $y = \int e^{-x^2} \mathrm{d}x$ en deze integraal kan niet uitgerekend worden aan de hand van de elementaire functies. In zulk geval (en dit komt veelvuldig voor - het is de normale verdeling uit de kansrekening) is men dus verplicht numerieke integratie toe te passen.

Opdracht 42. *Differentiaalvergelijkingen*
Het algoritme van Euler is niet echt bijzonder goed. Het vertoont zekere onstabiliteiten. Beschouw bijvoorbeeld eens $y' = \frac{-2}{y}$.

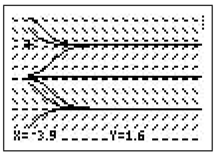
Oplossing 42. Het resultaat is het volgende.



Een korte berekening toont dat de oplossing van deze vergelijking $y = \sqrt{-4x + c}$ is. Dit is een parabool, met as $y = 0$. In haar top is de raaklijn dus vertikaal en heeft de differentiaalvergelijking geen zin. Ons algoritme, dat met benaderde waarde werkt zal in deze punten uiterst gevoelig zijn voor de kleinste fout en zal niet meer van toepassing zijn.

Opdracht 43. *Differentiaalvergelijkingen*
Wanneer de x-as de tijd voorstelt zal een horizontale asymptoot overeenstemmen met een evenwicht op lange termijn. Beschouw de differentiaalvergelijking $y' = \sin 2y$. Hoe hangt het evenwicht af van de beginwaarde?

Oplossing 43. Onze programma's geven volgend resultaat.



Men ziet dat op lange termijn, afhankelijk van de beginvoorwaarde er een evenwicht zal zijn in $y = \pm\frac{\pi}{2}$. Tenzij de beginvoorwaarde op de x-as ligt, dan zal de triviale oplossing $y = 0$ gevonden worden. Het evenwichtspunt 0 is afstotend, de anderen zijn aantrekkend.

Hoofdstuk 5

Enkele `app`'s

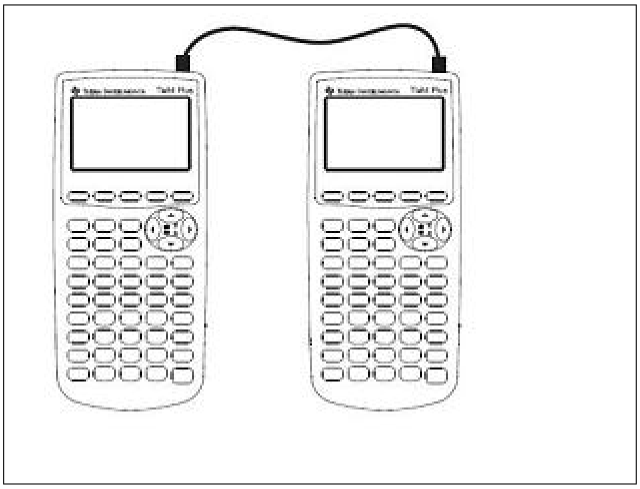
Op de CD, meegeleverd met de **TI-84+** , staan een aantal applicaties (kortweg `app`'s). Meestal zijn deze reeds geïnstalleerd op de **TI-84+** . We zullen er hier enkele bespreken die nuttig kunnen zijn in de lessen analyse van de 3de graad. We beginnen met uit te leggen hoe je een `app` van de ene **TI-84+** naar de andere kan overbrengen.

5.1 Een `app` overbrengen

Benodigdheden: twee **TI-84+** 's waarvan één met de gewenste `app` en één zonder en een usb-kabel om de twee machines te linken.

Doel: de `app` in kwestie op beide machines zetten.

Opstelling:



Werkwijze: Gebruik de usb-kabel om de twee machines met elkaar te verbinden. Doe dan beide **TI-84+** 's aan. Druk op 2nd [link]. De eigenaar van de **TI-84+** waar de gewenste app op staat kiest [send][apps...] en selecteert de app door op enter te drukken en kiest nadien [tramnsmit] maar **wacht** vooralleer hij op enter drukt. De eigenaar van de tweede **TI-84+** kiest [receive] en drukt op enter. Hierna drukt ook de eerste eigenaar op enter.

Waarneming: De eerste **TI-84+** zendt de gekozen app naar de tweede.

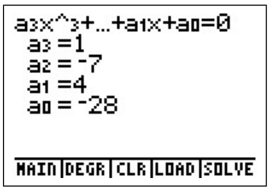
Besluit: Als alles goed verlopen is staat de app nu ook op het tweede machientje en kan ze nu worden opgestart of gebruikt.

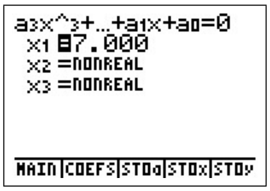
Opmerking: Op volledig analoge wijzen kunnen ook programma's, variabelen, etc. ... uitgewisseld worden. Zorg dat je altijd de nodige app's en programma's bij hebt, of neem je kabeltje mee. Verdere app's en programma's kunnen van het internet gehaald worden[1]. Voor de overdracht van pc naar **TI-84+** verwijzen we de gelukkige lezer naar de officiële **TI-84+** handleiding.

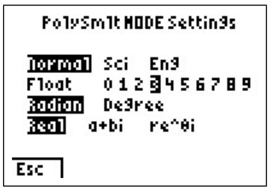
5.2 Polysmlt

De app [polysmlt] laat toe om nulpunten van veeltermen te benaderen en stelsels eerstegraadsvergelijkingen op te lossen.

Druk op apps en selecteer [polysmlt] om deze app te starten. Je krijgt dan een menu waar je [polyrootfinder] kan kiezen. Hierna wordt de graad van de veelterm gevraagd, daarna de coëfficiënten. Eenmaal dit gedaan, druk dan op alpha [F5] ([solve]) om de nulpunten te vinden. Als je nu [coeffs] en/of [degr] selecteert, kun je een nieuwe veelterm ingeven. Door tijdens het draaien van de app [polysmlt] op mode te drukken, kan worden ingesteld of de oplossingen ook complex mogen zijn. Verdere functies van deze app kun je achterhalen via de help in het hoofdmenu.



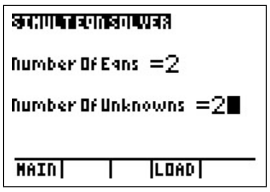


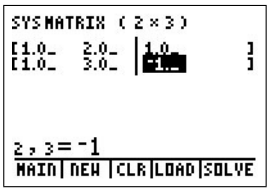


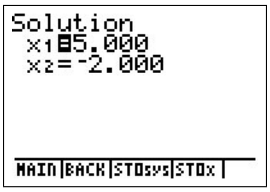
[1] www.ticalc.org of www.education.ti.com

Een opmerking bij deze `app` is de volgende, de uitkomsten zijn benaderde waarden en er worden alleen nulpunten gegeven. Het is belangrijk dat leerlingen deze uitkomsten leren interpreteren voor wat ze zijn en deze gebruiken om bijvoorbeeld de bovenstaande veelterm te ontbinden als $(x-7)(x^2+4)$ of $(x-7)(x-2i)(x+2i)$.

Stelsels eerstegraadsvergelijkingen kunnen worden opgelost met het tweede deel van de `app [polysmlt]`. Na het starten van de `app` kies je `[simulteqnsolver]` en voer je de gegevens in. De coëfficiënten moeten wel onder matrixvorm ingegeven worden. Daarna druk je op `[solve]` (`[F5]`) om de oplossing te bekomen.

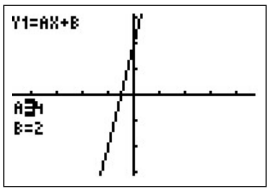




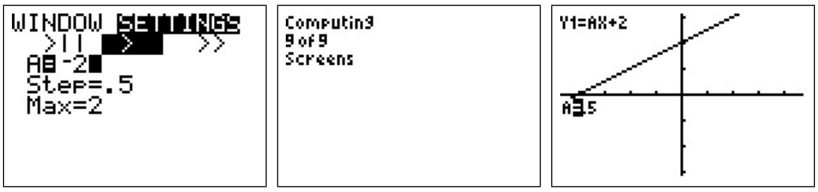


5.3 Transfrm

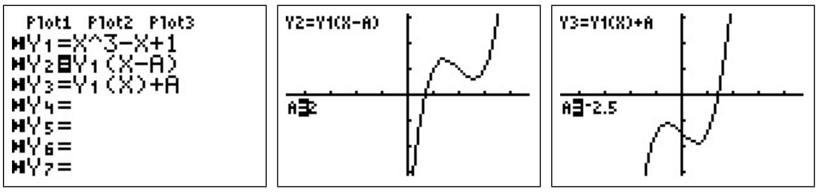
Eén manier om het belang van de verschillende parameters in een functievoorschrift te illustreren is het gebruik van de meegeleverde `app [transfrm]`. Wanneer deze `app` wordt gestart gebeurt er op het eerste zicht niets. Het is pas wanneer je een functie invoert om te tekenen dat je enkele extra mogelijkheden hebt. Voer bijvoorbeeld de functie $y_1 = ax + b$ in met behulp van `y=` en teken ze met `graph`. Onmiddellijk verschijnt de mogelijkheid om de waarden van a en b aan te passen (gebruik met `[transfrm]` altijd de letters a, b, c als parameter). Hiermee kun je duidelijk de invloed van een parameter nagaan.



Een andere mogelijkheid die `[transfrm]` biedt is om animaties te maken. Met `y=` voer je $y_1 = ax + 2$ in. Als de uitdrukking maar één parameter heeft kan `[transfrm]` er een animatie van maken. Hiervoor moet je eerst via `window` `[settings]` selecteren. Kies `[>]` (play) of `[>>]` (fast play) en geef een minimum, een maximum en een stapgrootte voor a. Maak nu de grafiek. Dit kan enige tijd duren, bovendien is de **TI-84+** beperkt door het geheugen. Indien de animatie niet gemaakt kan worden moet je het minimum, maximum en/of de stapgrootte voor a aanpassen.



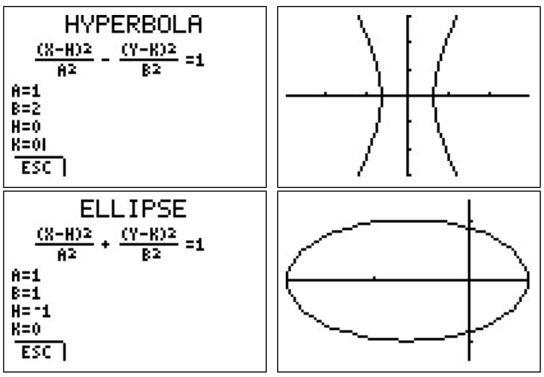
Je kan met deze `app` ook zeer goed de invloed van a nagaan in uitdrukkingen $a \cdot f(x), f(x) + a$ of $f(x - a)$. Via het menu `vars` `[y-vars]` waarin je `[function...]` selecteert kun je de functies $y_1, \ldots$ immers hergebruiken.



Belangrijk: Een nadeel van `[transfrm]` is echter dat je geen twee functies y_1, y_2 tegelijkertijd meer kan tekenen. Dit kan wel door in y_1 een lijst van voorschriften te geven $y_1 = \{\cos ax, \sin bx\}$. Als je gedaan hebt kun je `[transfrm]` afsluiten door `apps` `[transfrm]` te kiezen en dan `[uninstall]` te selecteren.

5.4 Conics

Met de `app` `[conics]` kun je experimenteren met de verschillende standaardvergelijkingen van kegelsneden.



Index

[π], 13, 23
[$a + bi$], 37
[+], 5
[/], 13, 23
[2nd], 4, 10
[4], 13, 23
[7], 10
[>>], 50
[>], 50
[F5], 49, 50
[Window], 8
[X,T,θ,n], 10
[angle], 4
[apps...], 49
[apps], 49, 51
[axesoff], 29
[calc], 4, 5, 7–9, 23, 33, 34, 38
[catalog], 5
[clrdraw], 36
[coeffs], 49
[conics], 51
[connect], 29
[connected], 15
[ctl], 36
[ctlghelp], 5
[degr], 49
[disp], 36
[dms], 4
[dot], 10
[draw], 13, 16, 23, 25, 34, 36
[drawinv], 16
[dy/dx], 5
[edit], 35
[else], 36
[end], 36
[enter], 15, 49
[exec], 35
[fmax], 4, 5
[fmin], 5
[fnint], 5, 26
[for], 36
[format], 17, 29
[function...], 5, 13, 51
[graph], 4, 8, 17, 50
[i/o], 36, 45
[if], 36
[input], 36, 45
[intersect], 5
[link], 49
[math], 4, 5, 13, 14, 26
[maximum], 5, 34
[minimum], 5
[mode], 10, 15, 16, 19, 20, 23, 26, 29, 37, 49
[nderiv(], 13
[nderiv], 5, 14, 26, 33
[new], 35
[nmin], 10
[no sign change], 31, 32
[nonreal answer], 37
[par], 15, 23, 26
[point], 36
[pol], 19, 20
[polyrootfinder], 49
[polysmlt], 49, 50
[prgm], 35, 45

[prompt], 36
[pt-on], 36
[radian], 15
[receive], 49
[send], 49
[seq], 10
[settings], 50
[simul], 15
[simulteqnsolver], 50
[solve], 49, 50
[tangent(], 13, 23, 25, 34
[test], 8
[then], 36
[time], 17
[trace], 15, 17, 29
[tramnsmit], 49
[transfrm], 50, 51
[u], 10
[uninstall], 51
[value], 5, 9
[vars], 5, 13, 51
[web], 17
[window], 7, 9, 10, 15, 17, 20, 21, 23, 30, 36, 50
[xres], 30
[y-vars], 5, 13, 51
[y=], 4, 5, 7, 8, 10, 13, 19, 23, 26, 34, 36, 44, 45, 50
[zbox], 28
[zdecimal], 4, 7, 8, 14, 19, 20, 23, 28–30, 34, 45
[zero], 7, 8, 38
[zoom], 4, 7–9, 15, 19, 20, 28, 30, 34
[zstandard], 8, 14, 30
[ztrig], 9, 15, 29, 34, 35

Bloemen, 20

Cardioïde, 18

Differentiaalvergelijkingen, 46, 47

Even en oneven functies, 12
Extrema en snijpunten, 33

Fieldplot, 44

Goniometrische functies, 15
Grafiek van een functie, 36

Inverse van een functie, 16

Kegelsneden in poolcoördinaten, 19

Lengte van een kromme, 25
Limieten, 9
Limieten en continuïteit, 28
Lissajous-krommen, 22

Meervoudige voorschriften, 8
Methode van Euler, 45
Minima en maxima, 34

Nulwaarden benaderen / Continuïteit, 31
Nulwaarden benaderen / Dichotomie, 37
Nulwaarden benaderen / Newton-Raphson, 38
Nulwaarden bepalen, 7
Numerieke integratie / Boven- en ondersom, 40
Numerieke integratie / Midpuntsregel, 41

Ongelijkheden, 8, 10
Ontbinden in factoren, 8
Orthonormale assenstelsels, 30

Poolcoördinaten / Asymptoten, 20
Poolcoördinaten / Oppervlakte, 41

Raaklijn en normaal, 14
Raaklijnen, 13, 14
Raaklijnen in parametercoördinaten, 24

Raaklijnen in poolcoördinaten, 23
Rijen, 10
Rijen / Model van Verhulst, 16

Spiralen, 21

Toepassing van afgeleiden, 15

Verticale asymptoten, 29
Vierkantsvergelijkingen, 37

Dit cahier gaat over analyse met de TI-84+.

De tekst is opgesteld aan de hand van de uitwerking van verschillende concrete voorbeelden die onmiddellijk in de klassituatie kunnen gebruikt worden. De voorbeelden behandelen een grote verscheidenheid in moeilijkheidsgraad. Sommige oefeningen zijn geschikt in een richting met slechts 3 uur wiskunde, andere kunnen uitgewerkt worden in het kader van de onderzoekscompetenties wiskunde.

Verder wordt er ook aandacht besteed aan de mogelijkheden en de beperkingen van een grafisch rekentoestel.

DIDIER DESES is leerkracht wiskunde aan het Koninklijk Atheneum Koekelberg en geeft les aan de Wetenschappelijke (5u wisk/week) en de Latijnse richtingen (3u wisk/week). Hij is tevens wetenschappelijk medewerker aan de Vrije Universiteit Brussel.