Insektsvandring

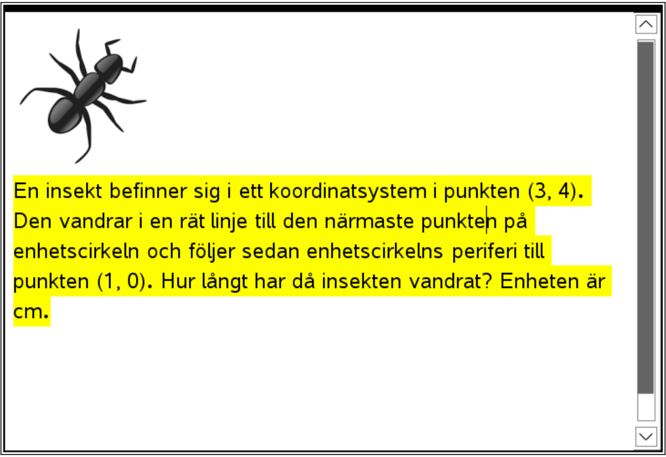
Här finns nu två problem om insekter som vandrar I koordinatplanet längs räta linjer och längs periferin på en cirkel.

I denna aktivitet så behandlas matematikområdena algebra, analytisk geometri, derivator. Vi får ganska krångliga ekvationer att lösa och långa uttryck med rottecken som ska deriveras. I problemen används både grafiska/numeriska metoder och exakta algebraiska metoder.

Problem 1

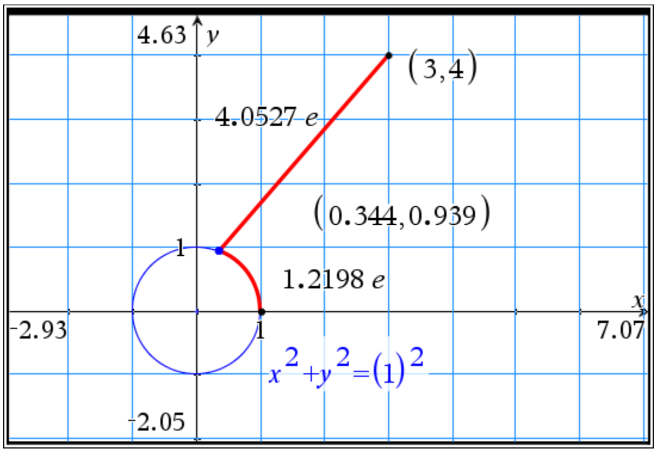
Sid 1

Så här ser det första problemet ut:

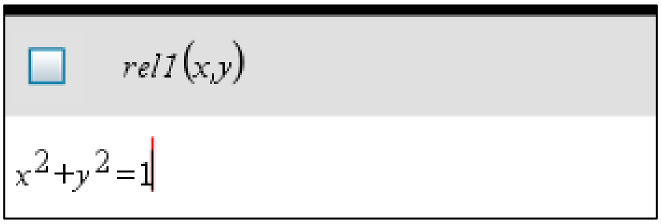

En insekt befinner sig i ett koordinatsystem i punkten (3, 4). Den vandrar i en rät linje till den närmaste punkten på enhetscirkeln och följer sedan enhetscirkelns periferi till punkten (1, 0). Hur långt har då insekten vandrat? Enheten är cm.

Sid 3

Vi börjar alltså med att göra oss en bild av situationen genom att plotta enhetscirkeln och den räta linjen i ett koordinatsystem i appen Grafer. Vi får anta att insekten har möjlighet att sikta in sig på den närmaste punkten på cirkeln.

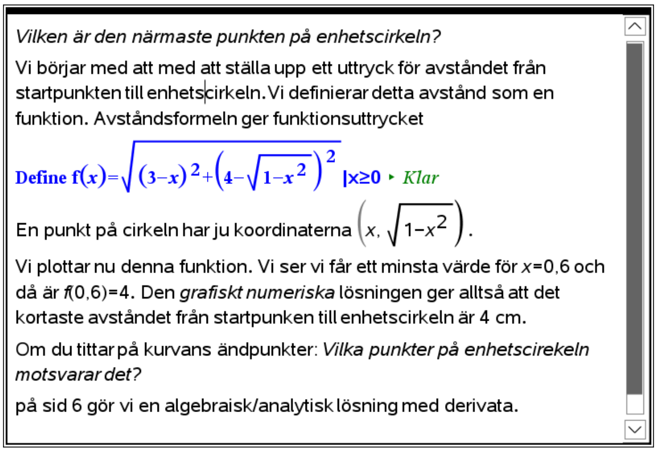


Cirkeln ritar du i grafritningseditorn genom att skriva in cirkelekvationen som en *relation*. Det finns också en flik *Ekvationsmallar* där man kan mata in ekvationer för olika kägelsnitt.



Sid 4

Vi tecknar avståndet från (3, 4) till enhetscirkeln och definierar detta uttryck som funktionen f(x). Define finns i verktygslådan under Beräkningar och sedan 1:Definiera variabler.
Tänk på att trycka **Ctrl+m** för att infoga en matematikruta om du som ovan gör beräkningar och andra matematiska ”aktiviteter” i appen Anteckningar.


Vilken är den närmaste punkten på enhetscirkeln?

Vi börjar med att med ställa upp ett uttryck för avståndet från startpunkten till enhetscirkeln. Vi definierar detta avstånd som en funktion. Avståndsformeln ger funktionsuttrycket

$\text{Define } f(x)=\sqrt{(3-x)^2+\left(4-\sqrt{1-x^2}\right)^2} \mid x\geq 0 \blacktriangleright \textit{Klar}$

En punkt på cirkeln har ju koordinaterna $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$.

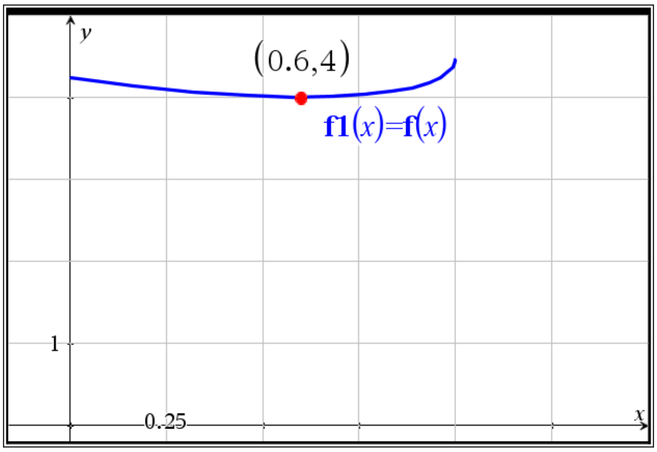
Vi plottar nu denna funktion. Vi ser vi får ett minsta värde för x=0,6 och då är f(0,6)=4. Den *grafiskt numeriska* lösningen ger alltså att det kortaste avståndet från startpunken till enhetscirkeln är 4 cm.

Om du tittar på kurvans ändpunkter: *Vilka punkter på enhetscirekeln motsvarar det?*

på sid 6 gör vi en algebraisk/analytisk lösning med derivata.

Sid 5

Plottning av funktionen f(x) och sedan så beräknar vi minimipunkten genom att använda verktyget *Minimum* under *Analysera graf*.



Sid 6

Här börjar nu våra mer besvärliga uttryck dyka upp. Derivatan av funktionen f(x) ger ett ganska besvärligt uttryck. TI_Nspire´s algebramotor ger snabbt uttrycket och löser sedan ekvationen $f'(x)=0$.

Vi tecknar avståndet från (3, 4) till en punkt på enhetscirkeln med avståndsformeln som en funktion:

Define $\mathrm{f}(x)=\left\{\sqrt{(3-x)^2+\left(4-\sqrt{1-x^2}\right)^2}, x\geq 0\right.$ ▸ *Klar*

Vi beräknar derivatan:

$\frac{d}{dx}(\mathrm{f}(x))$ ▸ $\left\{\frac{-\sqrt{2}\cdot\left(3\cdot\sqrt{1-x^2}-4\cdot x\right)}{2\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{-4\cdot\sqrt{1-x^2}-3\cdot x+13}}, x>0\right.$ ⚠

Vi sätter derivatan lika med noll och löser ekvationen nedan

$\mathrm{solve}\left(\frac{d}{dx}(\mathrm{f}(x))=0,x\right)$ ▸ $x=\frac{3}{5}$ ⚠ f(3/5) ▸ 4

Ett trick för att lösa ekvationen är att bara titta på när täljaren är noll. Man ser direkt att

$3\cdot\sqrt{1-x^2}-4x=0$ är en lösning. En lösning är x=3/5.

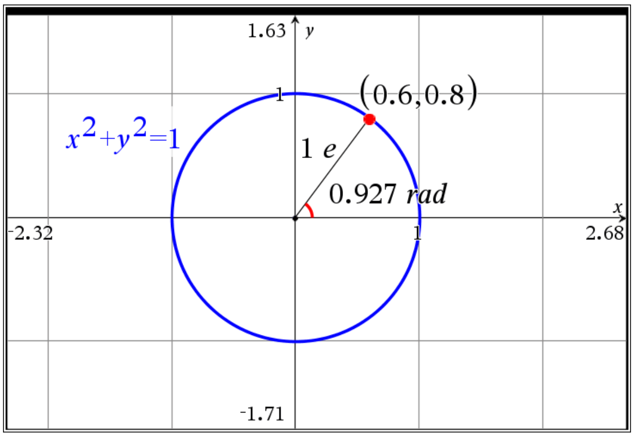
Sid 8-9

På denna sida beräknar vi nu direkt längden av cirkelbågen. Cirkelbågens längd är ju $v\cdot r$, där r är radien.

När x=3/5 är alltså längden på linjen från punkten till cirkeln 4 cm. Hur lång är då bågen?

Eftersom x–koordinaten för den blå punkten är 3/5 är cos(v) för bågvinkeln 3/5. Vinkeln är då arccos(3/5) eller $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$. Bågens längd är $v\cdot r=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\cdot 1$ ▸ **0.927295**

Totala sträckan är alltså $4+\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ ▸ **4.9273**

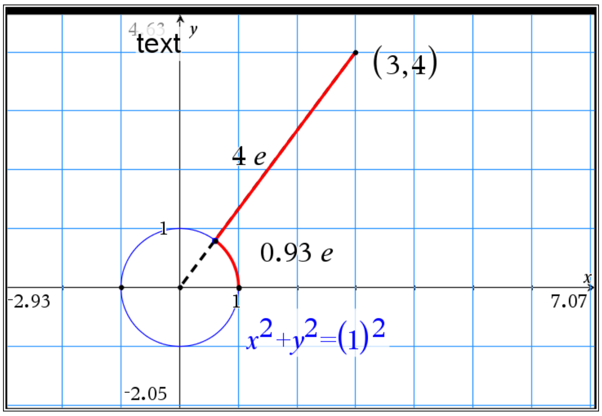


Problem 2

Sid 1-2

Den enkla lösningen: Om man drar en linje från startpunkten till enhetscirkelns medelpunkt så utgör den sträckan hypotenusan i en rätvinklig triangel med kateterna 3 cm och 4 cm. Längden är då 5 cm enligt Pythagoras sats.

Det kortaste avståndet ligger naturligtvis efter den linjen och längden för sträckan från startpunkten till cirkelns periferi blir då 5 cm -1 cm = 4 cm. Sedan återstår att beräkna båglängden enligt tidigare. Se nästa sida.

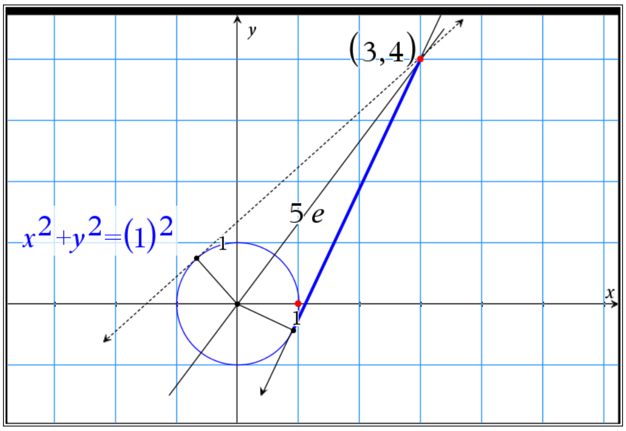


Problem 3

Sid 1-2

Den första insektens kompis befinner sig också i punkten (3, 4) men vill inte vandra till den närmaste punkten på cirkeln utan föredrar att närma sig enhetscirkeln via en tangent till cirkeln. Från tangeringspunkten så går den sedan den närmaste vägen längs cirkelns periferi till punkten (1, 0). Hur lång blir den resan?

På nästa sida har vi ritat upp situationen och dragit de två tangenterna. Vi gör våra beräkningar på den tangent som ligger närmast punkten (1, 0).



Verktyget för att rita en tangent finns bland geometriverktygen för punkter och linjer. Man markerar det objekt för vilket man vill rita en tangent och man kan sedan flytta tangeringspunkten. Om objektet är en cirkel kan man dra tangenten runt hela cirkeln. Ekvationen för tangenten visas också.

Sid 3-4

Vi söker nu tangeringspunkten på enhetscirkelns högra sida. Vi använder enpunktsformen, $y-y_1=k(x-x_1)$, för tangenten ekvation. k–värdet är derivatan av funktionsuttrycket för den nedre cirkelhalvan.

Vi ska alltså derivera $y=-\sqrt{1-x^2}$. Observera negativa tecknet.

Derivatan blir $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Nu kan vi teckna ett *ekvationssystem* och lösa för x och y.

Vi ställer nu upp ett ekvationssystem med ekvationerna för tangenten och cirkeln och löser det.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y-4=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(x-3) \\ y=-\sqrt{1-x^2} \end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$\blacktriangleright\ x=\frac{8\cdot\sqrt{6}+3}{25} \text{ and } y=\frac{-2\cdot(3\cdot\sqrt{6}-2)}{25}$$

Ekvationerna ser krångliga ut men efter lite manipulerande i båda leden får man först fram ekvationen

$$4\cdot\sqrt{1-x^2}=3x-1$$

Kvadrering ger $16\cdot(1-x^2)=9x^2-6x+1$ som förenklas till $25x^2-6x-15=0$. Se vidare i skärmen nedan.

$$\text{solve}(25\cdot x^2-6\cdot x-15=0,x)$$

$$\blacktriangleright\ x=\frac{-(8\cdot\sqrt{6}-3)}{25} \text{ or } x=\frac{8\cdot\sqrt{6}+3}{25}$$

$$y=-\sqrt{1-\left(\frac{8\cdot\sqrt{6}+3}{25}\right)^2}\ \blacktriangleright\ y=\frac{4}{25}-\frac{6\cdot\sqrt{6}}{25}$$

Sid 5

Beräkningarna fortsätter med att vi med avståndsformeln beräknar längden på linjen från (3, 4) till tangeringspunkten.

Vi tecknar nu ett uttryck för avståndet från (3, 4) till den punkt vars koordinater vi beräknade på förra sidan. Det är den blå linjen på sid 2. Avståndsformeln ger:

$$\sqrt{\left(3-\frac{8\cdot\sqrt{6}+3}{25}\right)^2+\left(4-\frac{-2\cdot(3\cdot\sqrt{6}-2)}{25}\right)^2}\ \blacktriangleright\ 2\cdot\sqrt{6}$$

Vi fick ett något enklare uttryck nu.

$$2\cdot\sqrt{6}\ \blacktriangleright\ 4.89898$$

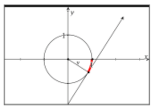
Pröva nu att mäta längden på den blå linjen på sid 2. Verkar det stämma?

Sid 6

Här beräknar vi nu till sist båglängden.

Nu till sist ska vi beräkna längden av den lilla bågen som startar i tangeringspunkten $\left(\dfrac{8\cdot\sqrt{6}+3}{25},\dfrac{-2\cdot(3\cdot\sqrt{6}-2)}{25}\right)$ och slutar i (1, 0).

Se figur.



Cosinus för vinkeln v är ju $\dfrac{8\cdot\sqrt{6}+3}{25}$ och detta ger att vi direkt kan beräkna båglängden ($b=v\cdot r$) där v mäts i radianer.

$$b=\cos^{-1}\left(\frac{8\cdot\sqrt{6}+3}{25}\right)\cdot 1\ \blacktriangleright\ b=0.442143$$

Den totala sträckan som denna insekt vandrar är då

Totala sträckan:

$$2\cdot\sqrt{6}+\cos^{-1}\left(\frac{8\cdot\sqrt{6}+3}{25}\right)\ \blacktriangleright\ 5.34112$$