Oplossingen

Hoofdstuk 1 : `TI-83` Tour : zie opgaven 1.12

Hoofdstuk 2 : Combinatoriek

1. $\binom{52}{4} = 270725$

2. $6! = 720$

3. $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

4. $\binom{15}{3} \cdot \binom{10}{2}$

5. $\frac{\binom{22}{11}}{2} = 352716$

6. 100

7. $\binom{7}{3} = 35$

8. (a) $\binom{8}{5} = 56$ (b) $\sum_{k=5}^{8} \binom{8}{k} = 93$

9. $5 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 6 = 140$

10. $(6)_4 = 360$

11. $30^3 = 27000$

12. $(10)_5 = 30240$

13. $\frac{n(n-3)}{2}$

14. $\binom{3+12-1}{12} = \binom{14}{2} = 91$

15. (a) 10^5 (b) $(10)_5 = 30240$ (c) $\binom{5}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 50400$

    (d) $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{2!} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 10800$ (e) $\binom{5}{3} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7200$

    (f) $\binom{5}{3} \cdot 10 \cdot 9 = 900$ (g) $\binom{5}{4} \cdot 10 \cdot 9 = 450$ (h) 10

16. (a) $2^{16} = 65536$ (b) $\binom{16}{8} = 12870$ (c) $\binom{16}{2} \cdot \binom{14}{4} = 120120$

    (d) $16! = 20922789888000$

17. $\binom{8}{4} = 70$ 18. $3!\cdot(4!\cdot 5!\cdot 6!) = 12441600$

19. (a) rechtstreeks : $\binom{2n}{n}$

(b) splits op in (*n* mannen, 0 vrouwen), (*n*-1 mannen, 1 vrouw), …

20. Splits de getallen 1,2,3,…30 op in getallen van de vorm $3k, 3k+1, 3k+2$.

$$\binom{10}{3}+\binom{10}{3}+\binom{10}{3}+10^3 = 1360$$

21. (a) 10 (b) 14 c) 200

22. (a) –7 (b) 109 (c) 209 (d) –100 (e) 26 (f) –35 (g) –190

23. $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

24. (a) 240 (b) 15/16 (c) –1760

25. (a) $a^6 + 12a^5b + 60a^4b^2 + 160a^3b^3 + 240a^2b^4 + 192ab^5 + 64b^6$

(b) $625 - 2000x + 2400x^2 - 1280x^3 + 256x^4$

26. $-\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{4} = -\frac{9!}{2!\cdot 4!3!} = -1260$

27. (a) 1 (b) 1 (c) 243 (d) 0 (e) $5^6 = 15625$ (f) $2^7 = 128$

Hoofdstuk 3 : Kansrekening en simulatie

1. 1/2 2. 35/36 3. 4/13

4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

5. 7/8 6. 5/324

7. (a) 2/91 (b) 24/91 (c) 45/91

8. 32/221. 9. (a) 7/10 (b) 3/5 (c) 3/5 10. 2/9

11. (a) 0.02722 (b) 0.00180 (c) $4\cdot10^{-5}$ (d) $1.1\cdot10^{-6}$ (e) $1.9\cdot10^{-7}$ (f) 2.9 %

12. Gokspel met één dobbelsteen : 0.5177
Gokspel met twee dobbelstenen : 0.4914

13. (a) 5/8 (b) 5/8 en 1/2 (c) 3/8 (d) 3/4 (e) 1/8 (f) ¼

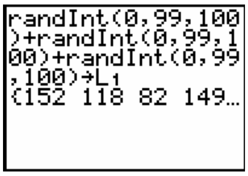
14. (a) 1/3 (b) 2/3 (c) 1/12 15. 1/3 16. 3/8

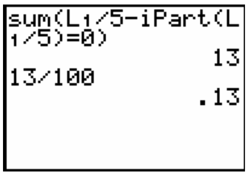
17. De meester heeft gelijk. Elke leerling heeft kans 1/24 om te winnen.
18. Vermenigvuldiging : 9/10 Optelling : 1/2 19. 3/5

20. Nummer de eenden in gedachten van 1 tot 10. Genereer lukraak tien getallen uit 1,2,…,10 met `randInt(1,10,10)`. De ontbrekende cijfers zijn de nummers van de overlevende eenden. Een eend zal overleven als de tien jagers een andere eend kiezen. De kans daarvoor is $0.9^{10} \approx 0.35$. Elk van de 10 eenden overleeft met kans 0.35. Op de lange duur overleven er zo gemiddeld 3.5 eenden per "experiment".

21. **`sum(seq(int(Ø.25 +rand),X,1,1Ø))`**

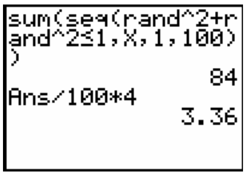
22.



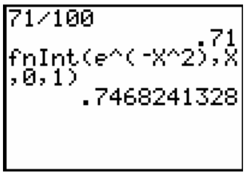


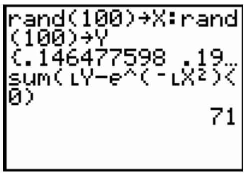
23. In het totaal zal de vader ongeveer $60 \cdot 14 = 840$ Euro betalen.

24.



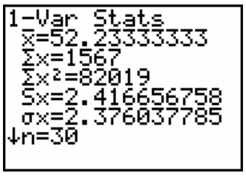
25.

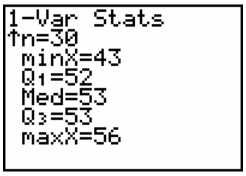




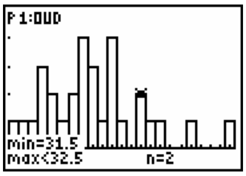
Hoofdstuk 4 : Beschrijvende statistiek

1.

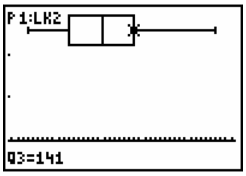




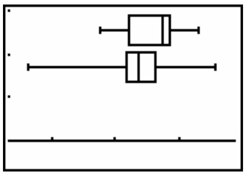
2.



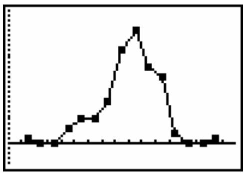
3.



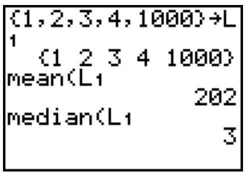
4.

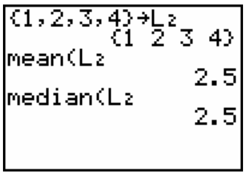


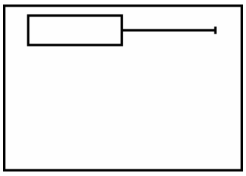
5.



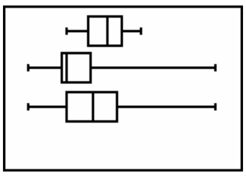
6.

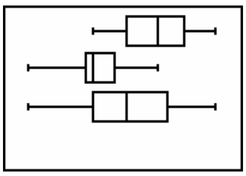






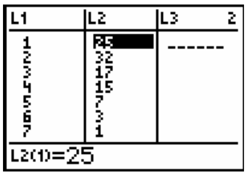
7.

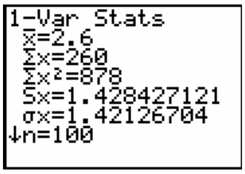




Hoofdstuk 5 : Van beschrijvende naar verklarende statistiek

1. $Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left(X^2 - 2\mu X + \mu^2\right) = E\left(X^2\right) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E\left(X^2\right) - \mu^2$

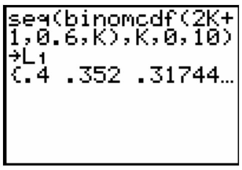
2. 

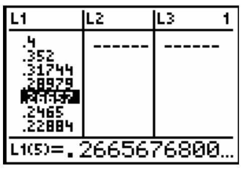


$E(X) = 2.6$, $Var(X) = \sigma^2 = 2.02$

3. $E(X) = 3.5$, $Var(X) = 35/12 = 2.92$, $E(X^2) = 91/6 = 15.2 \neq E(X)^2$
4. $E(S) = 7$, $Var(S) = 35/6$
5. (a) 4 (b) 3 (c) 16 (d) 92 (e) 17 (f) $a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$
6. $E(X) = -0.25$ Euro
7. (a) $E(S) = 3$, $E(M) = 17/8$ (b) $E(S) = 3$, $E(M) = 7/3$
8. $E(X) = 25$
9. $E(X) = -17/216$
10. $E(X) = 1.95$, $E(K) = 34.75$ Euro

Hoofdstuk 6 : Kansverdelingen

1. **binompdf(12,Ø.5,6)** = 0.2256
2. **1-binomcdf(5,1/6,1)** = 0.1962
3. **1-binomcdf(5ØØ,Ø.ØØ1,1)** = 0.0901
4. **normalcdf(1Ø49.5,1Ø^99,1ØØØ,** $\sqrt{1000*5/6}$ **)** = 0.0432
5. 

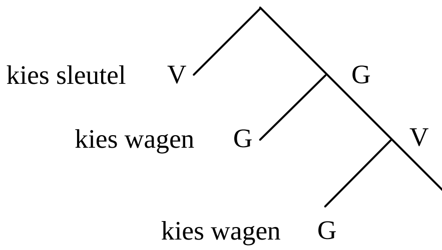


6. De gevraagde kans is **binomcdf(75,Ø.96,73)** = 0.8069.
7. a) **binomcdf(25,Ø.3,12)** – **binomcdf(25,Ø.3,6)** = 0.6419

   b) **normalcdf(6.5,12.5,7.5,** $\sqrt{7.5*0.7}$ **)** = 0.6542

   c) **normalcdf(6,12,7.5,** $\sqrt{7.5*0.7}$ **)** = 0.7189
8. De z-scores zijn : $z_{\text{wiskunde}} = \dfrac{52-47}{3} = 1.67$ en $z_{\text{elektronica}} = \dfrac{31-27}{2} = 2$.
9. `normalcdf(-10^99,800,1000,120)` = 0.048

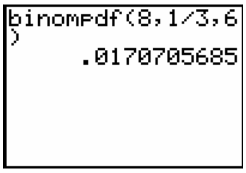
10. a)

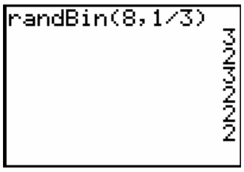


G = Goed
V = Verkeerd

$$P(\text{wagen}) = \frac{1}{3}$$

b)

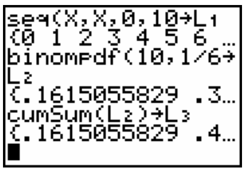


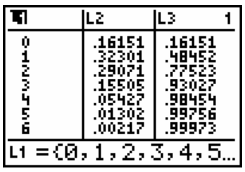


11. **normalcdf(130,140,115,13)** = 0.0970
12. **normalcdf(-10^99,1000,1015,10)** = 6.68 %
13. $W \sim N(44,5)$ $\mapsto$ **normalcdf(50,10^99,44,5)** = 11.51 %.
14. $N(3672,18)$
15. a) $U+V+W \sim N(3\mu, \sqrt{3}\cdot\sigma)$ b) $2U \sim N(2\mu, 2\sigma)$
    c) $U-V \sim N(0,\sqrt{2}\cdot\sigma)$ d) $2U+V \sim N(3\mu,\sqrt{5}\cdot\sigma)$
    e) $U+2 \sim N(\mu+2,\sigma)$ f) $V-\mu \sim N(0,\sigma)$
    g) $\dfrac{W-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ h) $\dfrac{W}{2} \sim N\left(\dfrac{\mu}{2},\dfrac{\sigma}{2}\right)$
    i) $2U-V-W \sim N(0,\sqrt{6}\cdot\sigma)$
16. a) 100.34km/h b) **normalcdf(100,10^99,100.34,11.99)**
17. $X \sim N(58,6.4)$ en $Y \sim N(52,5.9)$ $\Rightarrow$ $Z = Y - X \sim N\left(52-58, \sqrt{5.9^2+6.4^2}\right)$
18. a) 0.6226 b) 0.6256 c) 0.4379 d) 0.5595
19. a) 0.6892 b) 0.0456
20. **normalcdf(8,10^99,6,1)** = 2.28 %

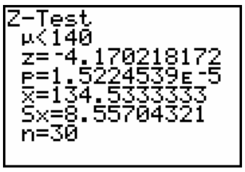
Hoofdstuk 7 : Toetsen van hypothesen

1.

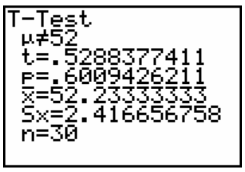


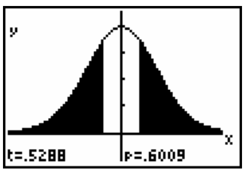


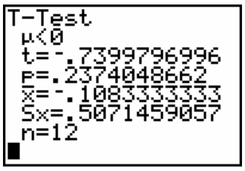
2.

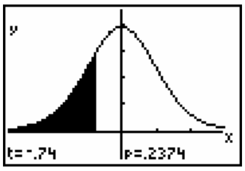


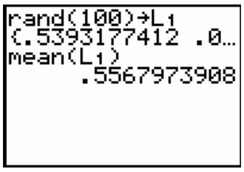
3.

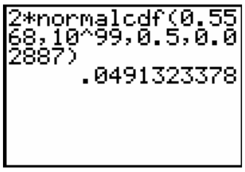


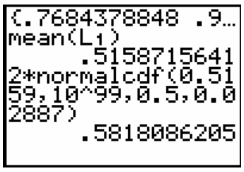


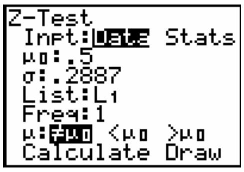
4. 

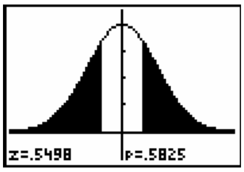


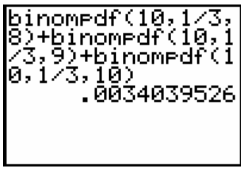
5. 

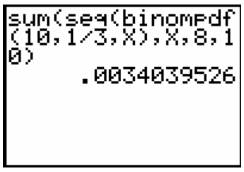


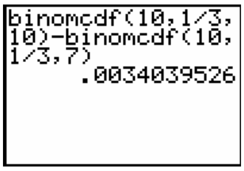


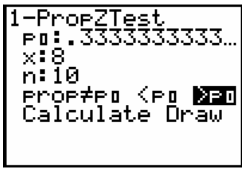


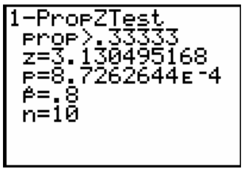


6. 









Hoofdstuk 8 : Betrouwbaarheidsintervallen

1. $\bar{x} = 52.23$
2. a) 90% : $[51.51, 52.96]$ en 60% : $[51.86, 52.60]$

   b) 90% : $[51.48, 52.98]$ en 60% : $[51.85, 52.61]$

5. (a) 0.8404 ± 0.0077 of $[0.8327 , 0.8481]$ (b) 0.8404 ± 0.0133

   (c) Uit $z \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.005$ met $z = 1.96$ volgt $n \geq 7.1$, neem dus $n = 8$.

6. [5.138 , 5.188]

7. Stel μ het gemiddelde van de normale verdeling waaruit de data komen. Met $H_0 : \mu = 5$ en $H_1 : \mu \neq 5$ vinden we met de T-test een **p**-waarde van 1.9 % . Dit is kleiner dan α . Bijgevolg verwerpen we H_0 .

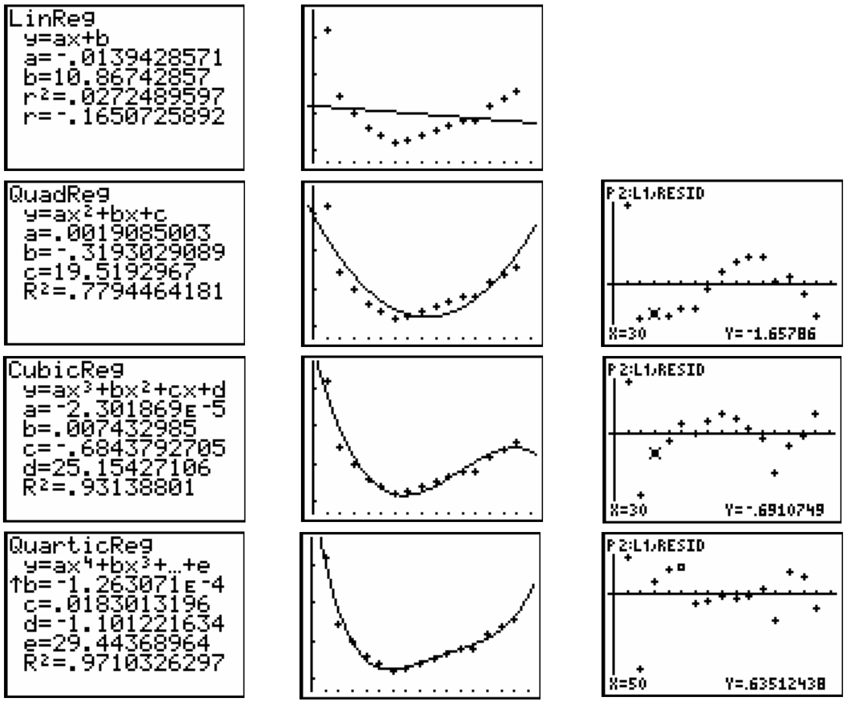
   Een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde is [4.91 , 4.986]. . Het getal 5 ligt niet in dit interval. We verwerpen $H_0 : \mu = 5$.

   We besluiten dat het labo systematische meetfouten maakt.

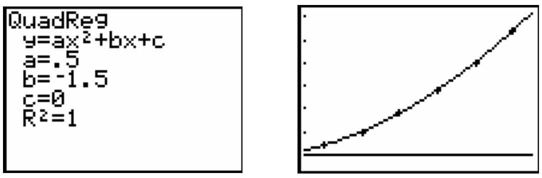
Hoofdstuk 9 : Regressie, correlatie en modelvorming

1. Zoek de beste rechte $y = ax + b$ “door” de punten (3,1), (1,2) en (5,3). Verwissel de letters *x* en *y*.

2.



3.

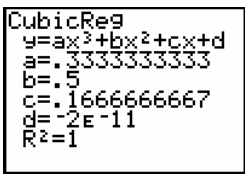


Alle punten liggen op een parabool $y = 0.5x^2 - 1.5x$.

<u>Met combinatoriek</u>

Stel x het aantal zijden van de veelhoek. Kies een hoekpunt en teken vervolgens een diagonaal. Dat kan op $x(x-3)$ mogelijkheden. Hierbij is echter elke diagonaal dubbel geteld. Dus zijn er $y = \dfrac{x(x-3)}{2}$ diagonalen (met $x \in \mathbb{N}$ en $x \geq 4$).

4.



$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

5. Een parabool is een geschikt model.

6. Een exponentieel model is nog beter dan een lineair model.

7. (a) De beste rechte heeft vergelijking $y = \overline{y}$.
   Bijvoorbeeld 4 hoekpunten van een vierkant.

   (b) r is niet gedefinieerd (deling door 0)!

8. (a) $y = ax$ met $a = \dfrac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$ levert $y = 53.33x$, $k = 53.33 \cdot 0.981 = 52.32$ N/m.

   (b) $y = 53.28x + 0.37$

   (c) Een puntenwolk heeft maar één correlatiecoëfficiënt r, ongeacht de modelkeuze. Hoe dichter $|r|$ bij 1 gelegen is , hoe beter echter de punten zullen aansluiten bij de beste rechte van de vorm $y = ax + b$, deze rechte gaat steeds door het zwaartepunt $(\overline{x}, \overline{y})$. Beschouw bv. de twee punten (1,2) en (2,1) met de beste rechte van de vorm $y = ax + b$ en de beste rechte van de vorm $y = ax$. De determinatiecoëfficiënten voor beide rechten zijn verschillend.

9. $C = 16.13$ en $\beta = 0.16$

10.

Model	R^2	r^2
LnReg ($a + b.\ln(x)$)	0.892	0.892
ExpReg ($a.b^x$)	0.998	0.915
PwrReg ($a.x^b$)	0.998	0.911