

# Tricks och tips för din grafräknare



## Från förändringshastighet till derivator

Inledningsvis ska vi nu i två exempel titta närmare på data från den verkliga världen. Det är tänkta som bra ingångar till begreppet förändringshastighet. Dessutom visar vi hur man med matematiken kan åstadkomma modeller av dessa data och då få en bra förståelse för vad derivata är och hur det hänger ihop med förändringshastighet.

De mer räknarspecifika kunskaper som du behöver ha för att kunna följa beskrivningen med räknaren i detta dokument handlar bland annat om att infoga nya listor och döpa dem (max 5 tecken). Vi beskriver dem kort här:

- För att infoga en *ny lista* placerar du markören i kolumnhuvudet till *höger* om den plats där du vill ha en ny lista. Tryck sedan på  $\boxed{2nd}$   $\boxed{[ins]}$ . Då får du möjlighet att döpa listan. Längst ner på skärmen i formelfältet står det **Namn=**. Skriv då in ditt namn och tryck sedan på  $\boxed{enter}$ .
- För att åstadkomma listan AR0, som syns här till höger, så placerar du listan i kolumnhuvudet och skriver i formelfältet **AR0=AR-1749** och trycker sedan på  $\boxed{enter}$ .
- Olika statistiska och matematiska funktioner man kan behöva vid olika beräkningar når du genom att trycka på  $\boxed{2nd}$   $\boxed{[list]}$ . Under **OPS** finns statistiska funktioner. Med **sekv** till kan åstadkomma olika talföljder, t ex 0, 1, 2, 3 osv. Under **MA** finns olika beräkningsfunktioner, t ex summa, medel, median osv.

## Förändringshastighet

**Exempel1:** Första exemplet är data för befolkningmängden i Sverige från år 1749 och fram till 2021. Det är en lång tidserie med 272 värden. Data har vi hämtat från SCB. Först har vi sparat i programmet Excel i s.k. *csv*-format (comma separated value). Via det kostnadsfria programmet *TI Connect* har vi sedan överfört data till räknaren. Årtalen har vi sedan räknat om så att de börjar vid år 0. Den listan har vi döpt till AR0.

Därefter har vi skapat en ny lista, *DIFF*, med funktionen  $\Delta$ Lista som du hittar under OPS (Options). Placera markören i kolumnhuvudet och skriv sedan **DIFF=  $\Delta$ Lista(BEF)**. Inpassa sedan värdet 0 överst i listan. Då får vi förändringen jämfört med föregående år för alla data i listan.

Värdet 15954 i listan är alltså skillnaden mellan värdena på rad 2 och rad 1 i listan BEF.

	A	B	C	D
1	1749	1764724		
2	1750	1780678		
3	1751	1802132		
4	1752	1816703		
5	1753	1837869		
6	1754	1857047		
7	1755	1875029		
8	1756	1889424		
9	1757	1892990		
10	1758	1893444		
11	1759	1905866		
12	1760	1925248		
13	1761	1942257		
14	1762	1949359		



AR	AR0	BEF	DIFF	L1	3
1749	0	1.76E6	0		
1750	1	1.78E6	15954		
1751	2	1.8E6	21454		
1752	3	1.82E6	14571		
1753	4	1.84E6	21166		
1754	5	1.86E6	19178		
1755	6	1.88E6	17982		
1756	7	1.89E6	14395		
1757	8	1.89E6	3566		
1758	9	1.89E6	454		
1759	10	1.91E6	12422		

BEF(1)= 1764724

Vi börjar med att plotta ett diagram över befolkningsutvecklingen. Tryck först på  $\boxed{2nd}$   $\boxed{[stat plot]}$  för att göra diagraminställningen.

Så här ska vi ha inställningen för det första diagrammet. Vi ska alltså ha ett spridnings-diagram där AR0 är x-lista och BEF är y-lista. Eftersom det är många data i listan så väljer vi att ha prickar som symbol för datapunkter. Vi har också valt att ha röd färg.

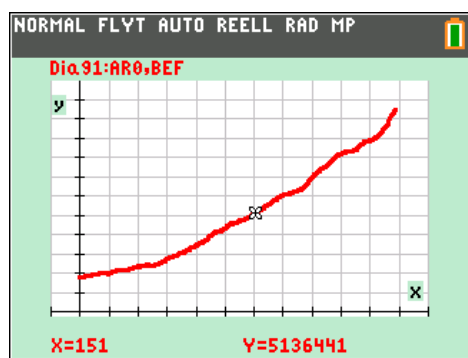
Di0.91	Di0.92	Di0.93
Av		
Skriv:	$\square$	$\square$
Xlista	: AR0	
Ylista	: BEF	
Markör	: $\square$ + $\square$	
Färg	: Röd	

# Tricks och tips för din grafräknare



Det svåraste just nu är att ställa in fönstret på ett bra sätt. På x-axeln ska vi täcka in alla 272 åren och på y-axeln befolkningsstorleken fram till 2021 som är knappt 11 miljoner.

Som tur är så finns det en väldigt bra zoom-inställning som heter *ZoomStat*. Prova den och gör sedan eventuellt en fininställning. Vi har i diagrammet valt att ha ett diskret linjerutnät. Blir lättare att göra avläsningar då. Så här kan det se ut. Se skärmbilden till höger. Man ser att befolkningen har växt stadigt även om man kan se antydning till att befolkningsutvecklingen planar ut eller att den till och med till blir negativ, dvs vi får en negativ tillväxt.



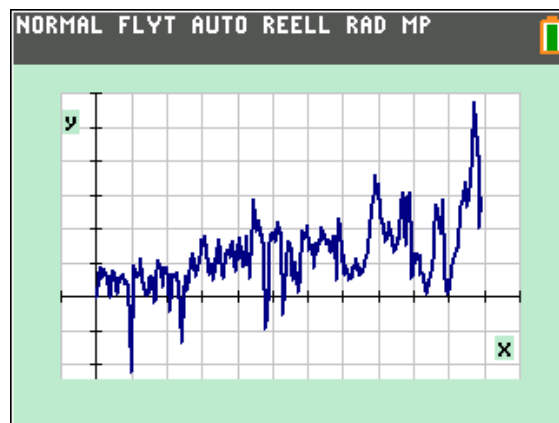
Här kan det vara intressant att titta närmare på *förändringarna*, dvs hur mycket befolkningen har förändrats sedan föregående år. Dessa data finns ju i listan *Diff*. Vi börjar då med att stänga av diagram-plottningen för listan med befolkningsstorlek.

Så här blir nu inställningarna för *förändringsdiagrammet*. Se skärmen till höger.

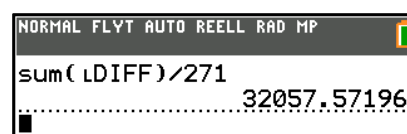


Så här blir nu förändringsdiagrammet:

Vi får ett minst sagt hackigt diagram som alltså visar att befolkningsförändringen (jämförelse med föregående år) har varierat mellan ca - 50 000 och 90 000. Man urskiljer bland annat tydligt de två hacken i kurvan ca 1870–1880. Då minskade befolkningen på grund av den stora emigrationen till Nordamerika. I vissa årskullar lämnade var femte man och var sjätte kvinna Sverige.



Vi kan dock ur diagrammet se att tillväxten verkar öka men med några undantag när den dippar ordentligt. Den genomsnittliga befolkningsförändringen är ca 32 000 personer/år. Man summerar då data i listan *DIFF* och dividerar med antalet värden. Se skärmbilden nedan.



Vi ska nu återvända till det förra diagrammet och göra en regressions-analys för att se hur pass väl data är anpassade till en exponentiell modell. För populationer som växer är exponentiella modeller det vanligaste. Får vi ett bra resultat på regressionsanalysen så kan vi låta den exponentiella modellen ersätta alla våra data. Allting blir så mycket enklare då.

Tryck nu på **[stat]** och välj sedan **BERÄKNINGAR** och sedan alternativ 0 i listan. Se figur. Det finns många olika modeller att välja på.



# Tricks och tips för din grafräknare

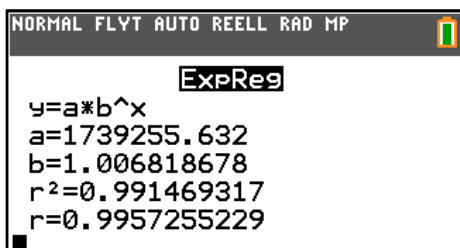


Nu kommer ett dialogfönster upp och då ska du fylla i X-lista och Y-lista och vad den framräknade regressions-ekvationen ska hamna. Markera sedan **BERÄKNA** och tryck på **enter**.



Nu får räknaren jobba ett tag. Det handlar ju om nästan 300 observationer i listan för befolkningsstorlek. Det märks på att det gula upptaget-hjulet högst upp till höger i fönstret snurrar.

Så här blir nu resultatet. Korrelationskoefficienten  $r$  blir ca 0,996. Vilket betyder att data är i stort sett helt anpassade till modellen.



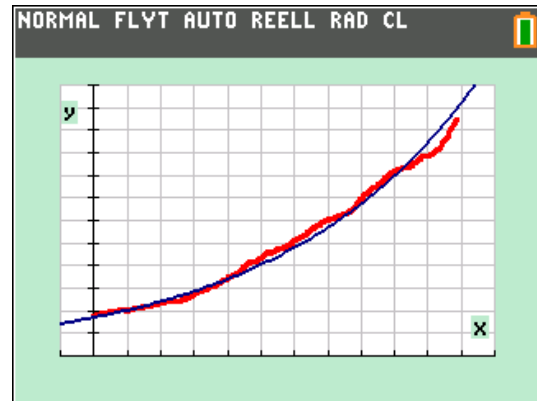
Tänk på att om du vill ha-värdet visat så måste du ställa in STAT-DIAGNOSTIK i läget PÅ. Tryck på **mode** och titta på dina inställningar.

Den framräknade regressionsekvationen med ett lämpligt antal värdesiffror blir då

$$y = 1,739 \cdot 1,00682^x \text{ miljoner}$$

Det betyder att befolkningen enligt modellen har växt med 0,68 % varje år. I exponentiella modeller är den relativa tillväxthastigheten konstant men den absoluta varierar.

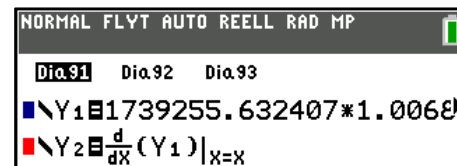
Nu kan vi plotta. Vi ser hur den exponentiella modellen följer den röda befolkningskurvan. Man ser dock att modellen under senare tid verkar dra ifrån den röda kurvan. Hur ser då kurvan för förändringshastigheten ut? För år 2021 var befolkningen 10 452 326 och enligt modellen 11 043 512. En skillnad på ca 590 000!



## Numerisk derivata

Vi skriver nu in derivatafunktionen i editorn för funktionsinmatning. Funktionen **nDeriv**, som beräknar den numeriska symmetriska differenskvoten, når du genom att trycka på tangenten **math** och sedan välja alternativ **8 nDeriv**(. Så här ser de då ut i editorn för funktionsinmatning. Funktionen i Y1 och den numeriska derivatafunktionen i Y2.

I stället för att plotta väljer vi nu att representera funktionerna med en värdetabell och vi tittar på några enstaka värden. Man kan ställa in tabellvisningen på olika sätt, Det görs med **2nd**-funktionen **tblset**.



Så här ser nu tabellen ut. Vi har valt att visa värden för vart 50:e år. Man ser hur förändringshastigheten ökar. Hur är det då med den *relativa* förändringshastigheten? Vi skapar då en ny funktion där vi tittar på kvoten  $Y2/Y1$ !

X	Y1	Y2			
0	1.74E6	11819			
50	2.44E6	16602			
100	3.43E6	23319			
150	4.82E6	32755			
200	6.77E6	46009			
250	9.51E6	64625			
270	1.09E7	74034			

X=

# Tricks och tips för din grafräknare



Då blir det så här. Se skärmbilden till höger. Man ser att kvoten är konstant.

X	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>
0	1.74E6	11819	0.0068
50	2.44E6	16602	0.0068
100	3.43E6	23319	0.0068
150	4.82E6	32755	0.0068
200	6.77E6	46009	0.0068
250	9.51E6	64625	0.0068
270	1.09E7	74034	0.0068

Y<sub>3</sub>=0.0067955363754654

Derivatans av en funktion  $y = k \cdot a^x$  är  $y' = \ln(a) \cdot k \cdot a^x$ . Det betyder att  $\ln(a)$  är ungefär 0,068. Vi räknar ut med räknaren. Vi ser att det stämmer.

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP
ln(1.006818678)
0.006795536

Vad händer om vi gör framskrivningar av befolkningsstorleken? Man kan då jämföra med de prognoser som finns.